

**кафедра «Радиоэлектроника»**

**Звездина М.Ю., Шокова Ю.А., Беляев А.В.**

# **Текст лекций**

**по дисциплине**

**«ФИЗИКА ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ»**

**Ростов-на-Дону**

**2020**

## СОДРЕЖАНИЕ

<b>1 ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССАХ</b>	<b>4</b>
<b>1 Волновой процесс</b>	<b>4</b>
1.1 Введение	4
1.2 Некоторые сведения из теории колебаний	5
1.3 Понятие волнового процесса	7
1.4 Виды волн	12
<b>2 Основные характеристики волн</b>	<b>15</b>
2.1 Основные характеристики волн	15
2.2 Энергия волны на примере поперечных колебаний струны	22
2.3 Плотность потока энергии	26
<b>3 Волновые уравнения в различных средах</b>	<b>29</b>
3.1 Вывод уравнения поперечных волн на струне	29
3.2 Решение волнового уравнения	33
3.3 Стоячие волны и их энергия	35
3.4 Эффект Доплера для звуковых волн	41
3.5 Эффект Доплера для электромагнитных волн	43
<b>2 РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН</b>	<b>47</b>
<b>4 Фазовая скорость колебаний в различных средах. Импеданс</b>	<b>47</b>
4.1 Фазовая скорость колебаний в различных средах	47
4.2 Понятие импеданса для акустических волн	51
4.3 Понятие импеданса для электромагнитных волн	54
<b>5 Дисперсия и групповая скорость</b>	<b>56</b>
5.1 Дисперсия. Нормальная и аномальная дисперсия	56
5.2 Групповая скорость	59
5.3 Сравнение фазовой и групповой скоростей. Дисперсионные кривые	62
5.4 Пример дисперсионных соотношений для прямоугольного волновода	64

<b>6</b>	<b>Отражение и прохождение волны на границе раздела сред</b>	<b>67</b>
6.1	Законы отражения и прохождения при нормальном падении волн на границу раздела сред	67
6.2	Наклонное падение продольной акустической волны на границу раздела жидких и газообразных тел	71
6.3	Наклонное падение продольной акустической волны на границу раздела твердых тел	73
6.4	Эффект расщепления электромагнитной волны в гиротропных средах	76
<b>7</b>	<b>Поверхностные волны на границе раздела сред</b>	<b>79</b>
7.1	Поверхностные акустические волны	79
7.2	Применение поверхностных акустических волн	82
7.3	Поверхностные электромагнитные волны на границе раздела сред	85
<b>8</b>	<b>Примеры преобразования типов волн в практических приложениях</b>	<b>89</b>
8.1	Согласование сред	89
8.2	Конструирование акустических линий задержки	92
8.3	Примеры использования изменения структуры поля вблизи границы раздела сред для электромагнитных волн	94
8.4	Примеры использования эффекта расщепления электромагнитных волн	96
	<b>ПРИЛОЖЕНИЕ А АКУСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ СРЕД</b>	<b>100</b>

## РАЗДЕЛ 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССАХ

### Лекция 1. Волновой процесс

*Введение. Некоторые сведения из теории колебаний. Понятие волнового процесса. Виды волн в зависимости от направления движения*

#### 1. Введение

**Теория волновых процессов** – область науки, исследующая волновые явления различной природы.

С колебаниями и волнами человек встречается постоянно. Существует большое многообразие волновых процессов, имеющих общие закономерности независимо от их физической природы и механизма возникновения. Звуковые волны образуются вследствие коллективного движения ее частиц. Электромагнитная волна – это взаимосвязанные электрическое и магнитное поля, изменяющиеся в пространстве и времени. Волны возникают в массовых потоках – на автомагистралях и конвейерах, в трубопроводах и системах массового обслуживания. Волновой характер носит процесс установления концентрации вещества при химических реакциях, плотности особей в популяциях. Наконец, волны распространяются по нервным клеткам, обеспечивая жизнедеятельности живых организмов.

Однако, несмотря на большое разнообразие, в колебательных процессах наблюдаются одни и те же закономерности, которые описываются одинаковыми математическими и физическими моделями и исследуются общими методами.

Цель данной дисциплины – ознакомить будущего инженера с основами теории колебаний и волн, в основном применительно к проблемам радиотехники. В связи с этим наряду с электромагнитными волнами, в дисциплине рассматриваются и на анализе свойств акустических волн, которые применяются в элементах радиоэлектронной аппаратуры.

Следует отметить, что системы беспроводной связи в настоящее время стали основным способом для выхода мобильных абонентов в Интернет. В

связи с этим возникает необходимость подготовки высококвалифицированных специалистов, способных разрабатывать и эксплуатировать данные системы. Поскольку в беспроводных сетях носителем информации является сигнал, передаваемый с помощью электромагнитной волны, то для разработки систем на новых принципах, а также для модернизации существующих систем необходимо знание особенностей волновых процессов.

В рамках дисциплины «Физика волновых процессов» будут рассмотрены особенности распространения акустических и электромагнитных волн. Данные сведения будут в дальнейшем использоваться при изучении дисциплин прикладного характера, например, в дисциплине «Электродинамика и распространение радиоволн», «Антенны и устройства СВЧ» и ряде других.

Изучение дисциплины завершается зачетом.

## 2. Некоторые сведения из теории колебаний

Изучение теории физики волновых процессов начнем с напоминания общих сведений из теории колебаний, известных из курса программы физики средней школы.

Под **колебанием** понимается процесс повторяющегося движения около положения равновесия. Процесс описывается некоторой периодической функцией  $U = f(t)$ , такой, что при любом  $t$  и определенном  $T$  (периоде функции) выполняется условие:

$$f(t + T) = f(t). \quad (1)$$

В общем случае периодическая функция может быть разрывной, как показано на рисунке 1.

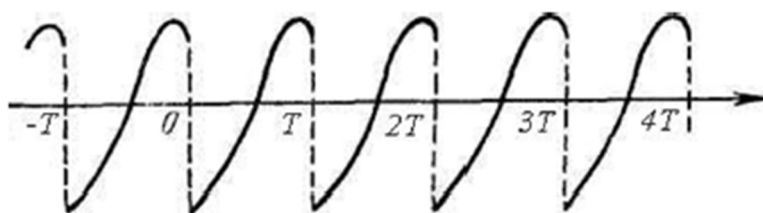


Рисунок 1 – Пример произвольной периодической функции

Существует *три признака колебательного движения*:

- *повторяемость (периодичность)*, т.е. движение по одной и той же траектории туда и обратно;
- *ограниченность* пределами крайних положений;
- *действие силы*, описываемой функцией  $F = -kx$ .

Функции, принадлежащие к классу периодических, разнообразны. Однако в радиотехнике особое место занимают *гармонические функции*. В общем случае гармоническая функция имеет временную зависимость, определяемую формулой Эйлера:

$$f(t) = \exp(\pm i\omega t) = \cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t), \quad (2)$$

где  $i = \sqrt{-1}$  - мнимая единица;

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \text{ - циклическая частота [рад/с];}$$

$f$  - линейная частота или частота [Гц=1/с].

Необходимость представления гармонических колебаний с помощью формулы Эйлера (2) обусловлена несколькими причинами. Во-первых, в низкочастотных цепях для описания процессов передачи сигналов используют ток и напряжение, фазы которых сдвинут на 90 градусов, как в тригонометрических функциях косинус и синус. Во-вторых, в высокочастотных системах передачи колебаний фазы электрического и магнитного полей также имеют сдвиг фаз 90° в средах без потерь.

Теория колебаний и волн изучает общий характер движения. Для его изучения могут быть использованы *два основных подхода*:

- кинематический;
- динамический.

При использовании *кинематического подхода* общие закономерности пытаются получить путем анализа осциллограмм функций на общем поле графика. В большинстве случаев подход является малопродуктивным.

При *динамическом подходе* строится дифференциальное уравнение, которое описывает все движения физической системы, независимо от

начальных условий. Затем с помощью математического аппарата из дифференциального уравнения получают уравнения частных движений, удовлетворяющие тем или иным начальным условиям.

Пример общего дифференциального уравнения – уравнение гармонического осциллятора:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = p(t), \quad (3a)$$

где  $\gamma$  - параметр, описывающий потери в системе;

$\omega_0$  - собственная частота гармонического колебания;

$p(t)$  - некоторое периодическое воздействие на систему.

Пример частного дифференциального уравнения – отсутствие потерь ( $\gamma = 0$ ):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = p(t). \quad (3б)$$

Таким образом, первоначальное определение колебания можно уточнить следующим образом.

**Колебательный процесс** – это ограниченные в пространстве движения в окрестности некоторого среднего положения.

Колебательный процесс можно описать конечным набором параметров, изменяющихся во времени.

### 3. Понятие волнового процесса

Поскольку в данной дисциплине волновые процессы рассматриваются с точки зрения их использования в качестве носителя информации в беспроводных сетях, то необходимо изучить вопрос об их распространении.

Колебательная система может отдавать энергию во внешнюю среду. Данная передача становится возможной вследствие того, что в упругих средах отдельные участки представляют собой отдельные колебательные системы, которые взаимодействуют с непосредственно прилегающими к ней ча-

стицами. При совершении колебаний система создает вокруг себя периодический ряд возмущений, т.е. воздействует на прилегающие частицы как *некоторая периодическая внешняя сила*. В результате частицы среды совершают колебания с частотой вынуждающей силы. Данный колебательный процесс будет распространяться в среде с некоторой определенной, характерной для свойств этой среды скоростью. При этом частица среды, находящаяся на расстоянии  $x$  от места начального возмущения ( $x=0$ ), начнет колебаться только тогда, когда до нее дойдет распространяющийся в среде колебательный процесс, т.е. через промежуток времени

$$\tau = x / v, \quad (4)$$

где  $v$  – скорость распространения колебательного процесса.

Далее будем рассматривать случай колебаний одной частоты (*мономатрическое колебание*). Если изменение во времени происходит по гармоническому закону ( $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\exp$ ), то *волна* называется *гармонической*. Данный тип колебаний применяется в радиотехнике для передачи сигналов различной формы в цепях радиотехнических устройств, а также при распространении их через открытое пространство. Теория представления сигнала для таких колебаний в виде разложения в ряд Фурье на передающей стороне, а также восстановление сигнала на приемной стороне достаточно хорошо разработана.

В результате колебания частицы с координатой  $x$  будут происходить по закону, описываемому соотношением:

$$U(t, x) = U_0 \exp[i\omega(t - \tau)] = U_0 \exp[i\omega(t - x / v)], \quad (5)$$

где  $U_0$  - амплитуда волны в пучности.

Уравнение (1.5) определяется смещение частицы с координатой  $x$  в функции от времени и от расстояния до начала координат. Процесс периодичен не только во времени, но и в пространстве. По сходству явления с одним из его частных случаев (волнами на поверхности воды) данный процесс называют *волновым*, а распространяющееся в среде периодическое (или хотя бы мгновенное) возмущение – *волной*.

**Волна** – это любое изменение (возмущение) состояния среды, распространяющееся с конечной скоростью и несущее энергию.

В зависимости от типов среды различаются и волны, в них распространяющиеся. В общем случае, все волны можно выделить две группы:

- упругие;
- электромагнитные.

**Упругие (акустические) волны** – это волны, связанные с колебаниями частиц при механической деформации упругой среды (жидкой, газообразной, твердой). При этом имеет место перенос энергии упругой деформации при отсутствии переноса вещества. Примером акустических волн являются звуковые волны, представляющие чередующиеся области повышенного и пониженного давления воздуха, расходящиеся от источника звука. Совокупность упругих волн формирует **акустическое поле**. Акустические поля описываются скалярными функциями и называются скалярными полями.

**Электромагнитное поле** – это особый вид материи, отличающийся непрерывным распределением (электромагнитные волны) и обнаруживающий дискретность структуры (фотоны), характеризующийся способностью распространяться в вакууме (в отсутствие сильных гравитационных полей) со скоростью, близкой к  $3 \cdot 10^8$  м/с, и оказывающий на заряженные частицы зависящее от их скорости силовое воздействие.

Электромагнитные поля описываются векторными функциями и являются векторными полями.

В свою очередь, названия волн зависят от частоты. Иллюстрация разделения по частотам для упругих и электромагнитных волн показана на рисунке 2.

Среди упругих волн самые низкие частоты имеют **инфразвуковые волны ниже 16-20 Гц**. Ниже порогового уровня чувствительности человеческого уха. Инфразвук содержится в шуме атмосферы и моря. Источником его являются турбулентность атмосферы и ветер, грозовые разряды (гром), взры-

вы, орудийные выстрелы, вибрации различных узлов механизмов, двигателей и т.д.



### **Электромагнитные колебания - электромагнитные волны**

Рисунок 2 – Распределение волн по частоте

Для инфразвука характерно малое поглощение в различных средах, в связи с чем он может распространяться на большие расстояния. Это позволяет определять места сильных взрывов, предсказывать цунами, исследовать свойства водной среды.

**Звуковые колебания в диапазоне слышимости человека (20 Гц – 16..20 кГц).** Источник звука – любые явления, вызывающие местное изменение давления. Широко распространены источники звука в виде колеблющихся твердых тел, например, диффузоры громкоговорителей, мембраны телефонов, струны и деки музыкальных инструментов.

**Ультразвуковые колебания (от 16-20 кГц до 1 ГГц).** Уже не различаются ухом человека.

Распространение ультразвуковых волн существенно зависит от молекулярной структуры среды. Это свойство позволяет при измерении скорости распространения и затухания волн определять параметры среды, определять наличие неоднородностей и дефектов.

Источники ультразвуковых волн – электромеханические преобразователи (пьезоэлектрические, электродинамические, электростатические и т.п.).

***Гиперзвуковые колебания*** (от  $10^9$ .. $10^{12}$  –  $10^{13}$  Гц).

Можно рассматривать как тепловой шум, образованный тепловыми колебаниями атомов или ионов, составляющих кристаллическую решетку. Могут быть представлены в виде совокупности продольных и сдвиговых волн.

В воздухе и жидкости испытывают очень сильное затухание.

Источники гиперзвуковых волн – пленочные пьезоэлектрические преобразователи, кристаллы, помещенные в объемный резонатор с электромагнитным колебанием сверхвысоких частот.

Проанализируем распределение электромагнитных волн и колебаний по частоте.

***На низких частотах*** колебания напряжения и тока в электрических цепях можно рассматривать как проявление законов электростатики и электротехники.

Основной особенностью при этом является то, что размеры линий много меньше длины волны. Напряжения и токи на входе и выходе по сути синфазны, и, следовательно, волновые процессы, связанные с задержкой на прохождение линии, в них явно не проявляются.

***Электромагнитные волны радиодиапазона*** ( $3 \cdot 10^3$ .. $3 \cdot 10^{12}$  Гц). Диапазон ограничен невозможностью распространения волн на достаточно большие расстояния.

Источники – токи в проводниках и электронных потоках (генераторы радиочастот).

Применяются в радиотехнике, электронике и системах связи.

До диапазона инфракрасных волн процессы излучения и поглощения электромагнитных волн описываются законами электродинамики. На более высоких частотах доминируют процессы, имеющие квантовую природу.

#### 4. Виды волн

В зависимости от того, движутся ли частицы около своих положений равновесия вдоль или поперек направления, волны разделяют на продольные и поперечные. Рассмотрим некоторые из них.

##### *Продольные волны*

Возникают для возвращающих сил, препятствующих деформации сжатия или растяжения, в газах и жидкостях при попытке сблизить два соседних слоя или удалить их друг от друга. Вектор колебательной скорости параллелен направлению распространения, т.е. колебания частиц вещества происходят в направлении возвращающих сил

Структура волны показана на рисунке 2.

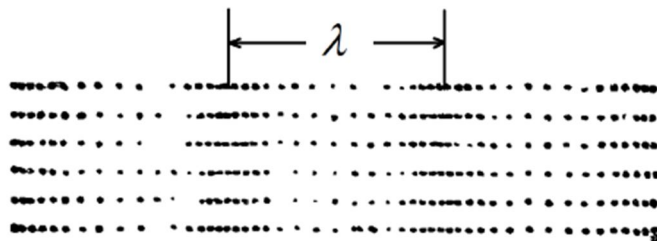


Рисунок 2 – Структура продольной волны

Продольные волны представляют собой чередующийся ряд сгущений и разрежений. Длина волны  $\lambda$  определяет расстояние между двумя соседними сгущениями или разрежениями.

Пример продольной волны – звуковая волна, расходящаяся от акустической системы усилителя звуковых частот.

##### *Поперечные (или сдвиговые) волны*

Деформация сдвига вызывает волну, распространяющуюся в направлении, перпендикулярном к направлению смещения частиц.

Волна, в которой колебательное движение совершается перпендикулярно к направлению распространения колебаний, называется *поперечной*.

Структура волны показана на рисунке 3.

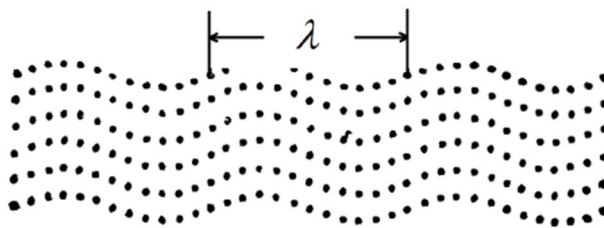


Рисунок 3 – Структура поперечной волны

Примеры поперечных волн: волны, бегущие вдоль натянутой струны, крутильные волны, вызываемые поперечным закручиванием и раскручиванием конца длинного стержня, электромагнитные волны.

Продольные и поперечные колебания волнонесущей среды представляют собой частные случаи волнового процесса. Существуют и другие волны, в которых колебательные движения складываются из одновременно продольных и поперечных смещений, например, поверхностные волны.

### ***Поверхностные волны***

Колебательные траектории частиц, участвующих в распространении поверхностной волны, не являются прямолинейными. Частицы описывают замкнутые эллиптические орбиты, как показано на рисунке 4.

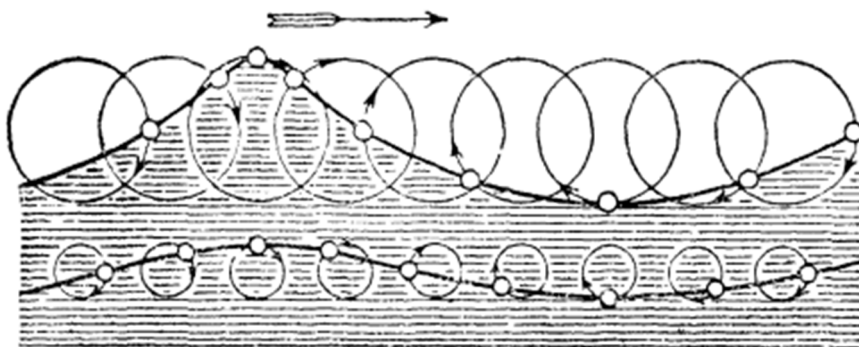


Рисунок 4 – Структура поверхностных волн

На рисунке 5 показаны силовые линии вектора напряженности электрического поля для поверхностных волн, возбуждаемых на металлическом экране с тонким диэлектрическим слоем.

Простые синусоидальные волны на поверхности могут существовать только при амплитудах, малых по сравнению с длиной волны. Например,

волны морских приливов, длина которых может достигать до сотен километров.

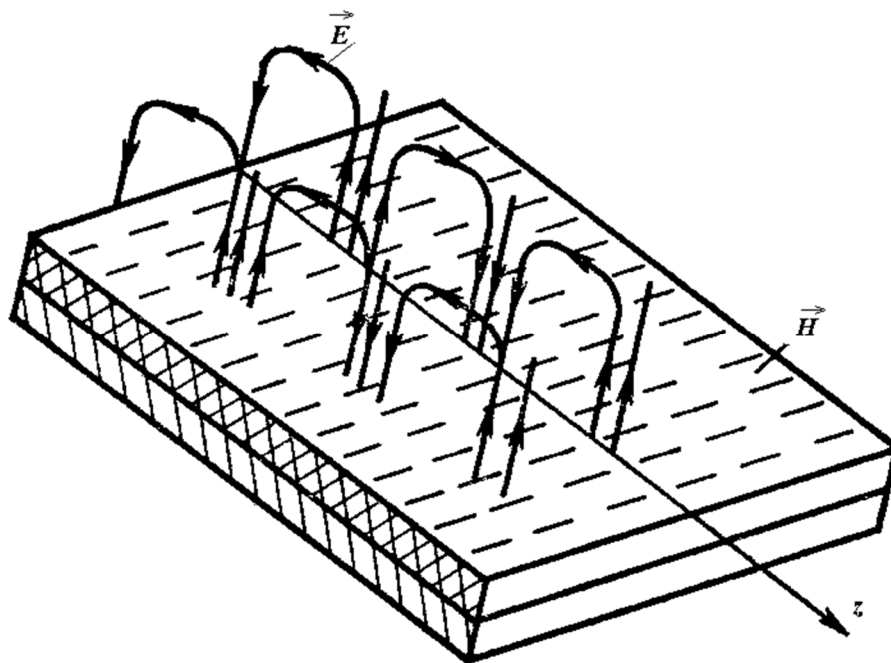


Рисунок 5 – Силовые линии электрического поля на металлическом экране с тонким диэлектрическим слоем

Поверхностная волна большой амплитуды увлекает за собой колеблющиеся частицы, которые в этом случае описывают уже не круговые, а более сложные траектории. Именно по этой причине большие волны выбрасывают на берег предметы, плавающие на них.

Волны возникают не только на свободной поверхности жидкости, но и вообще на поверхности раздела двух сред. В морской тематике поверхностные волны могут возникнуть на поверхности раздела пресной и соленой воды в устьях рек, впадающих в море. Данные волны получили название «мертвой воды». Идущие корабли вдруг тормозятся вследствие того, что корабль, попав на поверхность раздела пресной и соленой воды, разводит на ней невидимую с поверхности моря волну.

В радиотехнике поверхностные волны также возникают. Наиболее известным примером является электрический ток, возбуждаемый при падении

электромагнитной волны на металлический экран. Толщина проникновения электромагнитного поля ограничена толщиной скин-слоя. По мере убывания от поверхности экрана амплитуда тока (амплитуда электрического поля) затухает по экспоненциальному закону. Распространение электромагнитной волны в виде переменного элек

## Лекция 2. Основные характеристики волн

*Основные характеристики волн. Энергия волны на примере поперечных колебаний струны. Плотность потока энергии*

### 1. Основные характеристики волн

#### *Период колебаний*

Период колебаний  $T$  – это время, за которое осуществляется полный цикл колебаний. Измеряется в секундах.

#### *Длина волны*

Колебательные процессы (волны) определяются рядом параметров. Основным из них является длина волны, т.е. расстояние, на которое распространяется колебательный процесс со скоростью  $v$  за время одного периода  $T$

$$\lambda = vT. \quad (1)$$

Геометрия колебания, изменяющегося в пространстве, показана на рисунке 1.

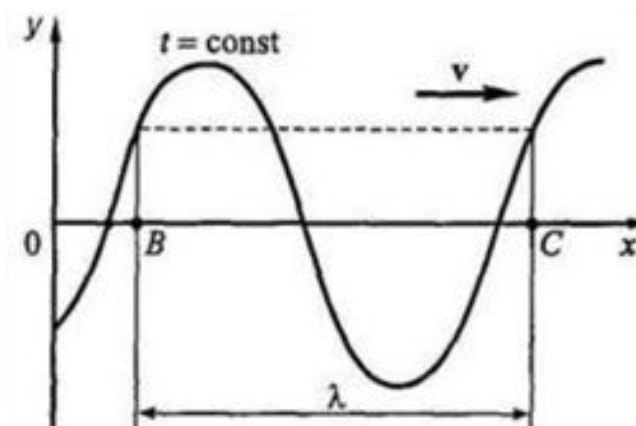


Рисунок 1 – Иллюстрация длины волны

#### *Критерий разделения процессов на колебательные и волновые*

Пусть характерные размеры системы составляют  $L$ . Тогда

$$L \begin{cases} < \lambda & \text{колебательный процесс,} \\ > \lambda & \text{волновой процесс. Система – распределенная} \end{cases}$$

### **Частота и волновое число**

Выявим взаимосвязь между циклической частотой, длиной волны и волновым числом, используя для этого их определения:

$$\text{Циклическая частота: } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

Длина волны  $\lambda$  по своей сути **является пространственным периодом и имеет обратную величину – волновое** число, которое также может трактоваться как «пространственная частота» (или число волн, приходящихся на длину  $2\pi$ ):

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (2a)$$

Фактически волновое число определяется скоростью возрастания фазового угла, приходящейся на единицу длины, для фиксированного момента времени:

$$k = \frac{\omega}{v}. \quad (2б)$$

С учетом выражения (2a) уравнение колебания частицы приводится к виду:

$$U(t, x) = U_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) = U_0 \exp[i(\omega t - kx + \varphi_0)], \quad (3a)$$

где  $U_0$  - максимальное отклонение колебания относительно равновесного состояния, т.е. **амплитуда колебаний**, размерность которой определяется природой гармонического колебания;

$\omega t - kx + \varphi_0$  - **фаза колебаний**, характеризующая определенное (мгновенное) состояние движения частиц среды при прохождении волны;

$\varphi_0$  - начальная фаза колебаний, определяемая источником колебаний.

С использованием понятия фазы волны вводится определение волновой поверхности (фронта волны). Данное определение справедливо для описания процесса распространения в трехмерном пространстве (объеме).

С учетом потерь в среде, соотношение (3a) принимает вид

$$U(t, x) = U_0 \exp[i(\omega t - kx)] \exp(-\gamma x), \quad (36)$$

где  $\gamma$  - коэффициент затухания волны [ $\text{м}^{-1}$ ].

Для акустической волны коэффициент затухания связан с параметрами среды соотношением:

$$\gamma = \frac{2\omega^2 \eta}{3\rho_0 c_0^3}, \quad (3в)$$

$\eta$  - коэффициент сдвиговой (поперечной) вязкости;

$\rho_0$  - равновесная плотность среды;

$c_0$  - скорость звука в среде.

**Волновой поверхностью (фронтом волны)** называется геометрическое место точек среды, колеблющихся в одной фазе. Если амплитуда волны во всех точках фронта одинаковая, **волна** называется **однородной**.

Распространение волн любой природы легко понять и объяснить, если обратиться к **принципу Гюйгенса**, который гласит:

каждая точка среды, вовлеченная в волновое движение, становится источником новой волны, называемой **элементарной волной**.

Наблюдаемый волновой фронт представляет собой результат сложения множества элементарных волн, как показано на рисунке 2.

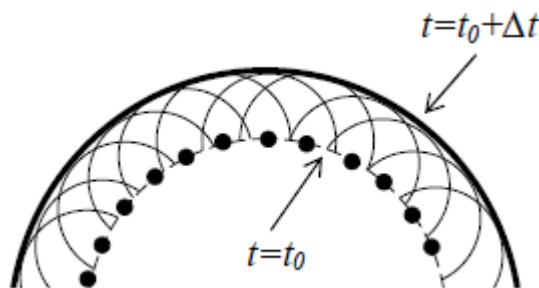


Рисунок 2 – Иллюстрация принципа Гюйгенса по положению фронта волны в различные моменты времени

Принцип Гюйгенса справедлив для всех видов волн, в том числе для акустических и электромагнитных.

Распространение волны происходит в направлении, перпендикулярном поверхности фронта. В зависимости от вида фронта волны классифицируются на плоские, сферические и цилиндрические.

В плоской волне волновые поверхности имеют виде плоскостей, как показано на рисунке 3.

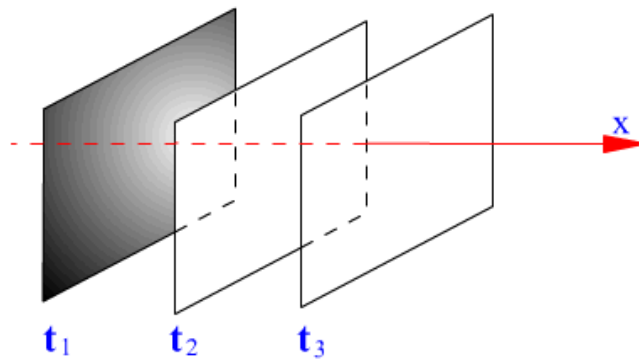


Рисунок 3 – Перемещение фронта плоской волны

Понятие **плоской волны** является удобным обобщением, поскольку в природе бесконечно протяженных источников не существует.

Уравнение распространения плоской волны в произвольном направлении имеет вид:

$$U = f\left(t - \frac{\ell}{v}\right) = f\left(t - \frac{\vec{r}\vec{n}}{v}\right), \quad (4)$$

где  $\vec{r}\vec{n} = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$ ;

$\alpha, \beta, \gamma$  - углы между вектором нормали  $\vec{n}$  и осями декартовой системы координат. Геометрия задачи показана на рисунке 4.

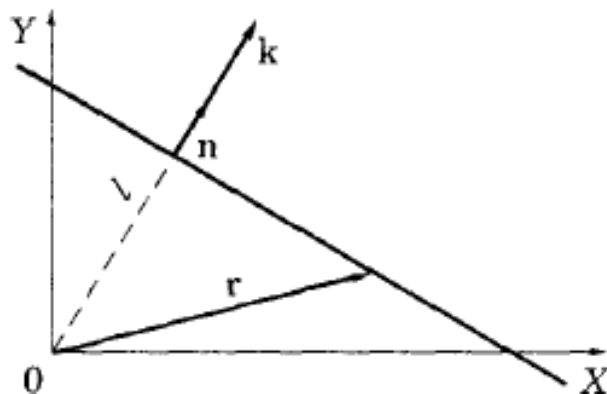


Рисунок 4 – Геометрия задачи о плоской волне

Для частного случая гармонической волны справедлива запись:

$$U = U_0 \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r}), \quad (5)$$

где  $\vec{k}$  - **волновой вектор**, определяемый выражением

$$\vec{k} = \frac{\omega}{v} \vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}. \quad (6)$$

Отметим, что в отличие от волнового вектора фазовая скорость  $v$  не является вектором. Данный вывод следует из того, что в любом направлении, составляющем угол  $\alpha$  с волновым вектором  $\vec{k}$ , скорость перемещения фазы равна  $\frac{v}{\cos \alpha} > v$ , а не  $v \cos \alpha$ , как должно быть, если бы фазовая скорость являлась вектором.

**Сферическая волна** в однородной изотропной среде, расходящаяся от точечного источника, описывается соотношением:

$$U = \frac{U_0}{r} f\left(t - \frac{r}{v}\right), \quad (7a)$$

где  $r$  – расстояние от точечного источника. На рисунке 5 показана геометрия фронта сферической волны.

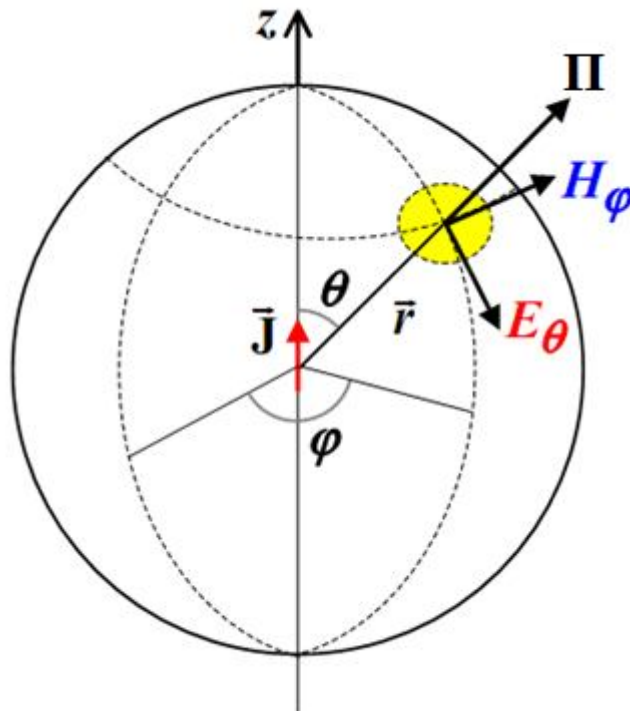


Рисунок 5 – Иллюстрация фронта сферической электромагнитной волны

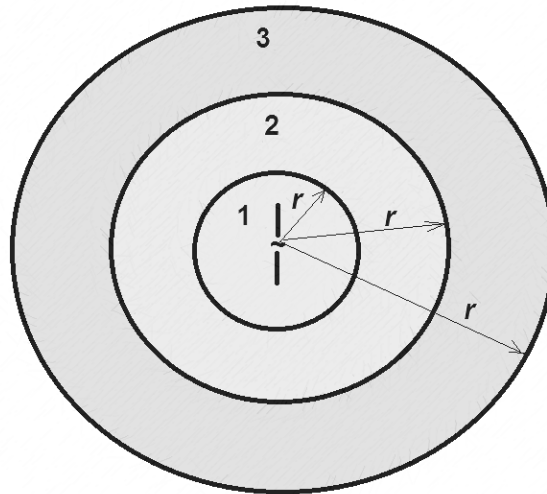


Рисунок 6 – Разбиение пространства вокруг источника на зоны:  
1 – ближняя; 2 - промежуточная; 3 - дальняя

В частном случае продольных монохроматических колебаний уравнение (7а) принимает вид:

$$U = \frac{U_0}{r} \exp(\omega t - kr). \quad (76)$$

Источником сферических волн, распространяющихся в радиальном направлении, может служить точечный излучатель. При анализе структуры излучаемого им поля пространство вокруг него разбивают на три зоны (области): ближнюю, промежуточную и дальнюю, как показано на рисунке 6. Критерием разделения является удаление точки наблюдения  $r/\lambda$  от источника (в длинах волн): ближняя зона, если  $r/\lambda \ll 1$ ; промежуточная зона или зона Френеля, для которой  $r/\lambda \approx 1$ ; дальняя зона (зона излучения, зона Фраунгофера, для которой выполняется неравенство  $r/\lambda \gg 1$ . В дальней зоне поле является квазиплоским, в остальных зонах – это волна со сферическим фронтом.

С учетом разделения пространства вокруг излучателя на зоны отметим два отличия выражения, описывающего сферическую волну, от аналогичного выражения для плоской волны:

- наличие множителя  $r^{-1}$ ;

- в фазовом множителе стоит не скалярное произведение, а произведение волнового числа  $k$  на расстояние  $r$ .

Кроме того, существует отличие и в способе прохождения сферической волны: в каждой точке среды всегда наблюдаются как сгущения, так и разрежения. Плоская волна может состоять только из одних сгущений или разрежений.

Другой важный вид симметричной волны – **цилиндрическая**, расходящаяся, например, от источников, равномерно распределенных вдоль оси в однородной среде. Геометрия фронта цилиндрической волны показана на рисунке 7.

Структура цилиндрической волны значительно сложнее сферической волны, а ее форма не повторяет временного поведения функции источников. Волна тянет за собой плотный «шлейф». И только на больших расстояниях  $R$  от источника (больших по сравнению с характерным параметром данной волны) ее можно представить в виде:

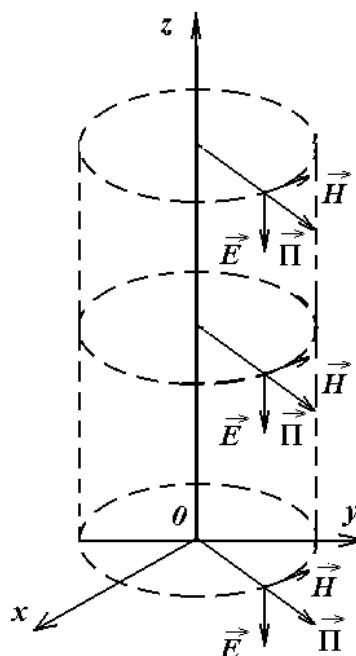


Рисунок 7 - Иллюстрация фронта цилиндрической электромагнитной волны

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{R}} f\left(t - \frac{r}{v} R\right). \quad (8a)$$

В частном случае монохроматической волны выражение (8а) принимает вид:

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{R}} \exp(\omega t - kR). \quad (8б)$$

Сравним выражения (7б) и (8б) для сферической и цилиндрической волн. Основные различия наблюдаются в радиальной зависимости: в сферической волне амплитуда затухает как  $r^{-1}$ , в цилиндрической волне как  $r^{-1/2}$ . Отсюда можно сделать следующий вывод: на больших расстояниях цилиндрическая волна затухает медленнее, чем сферическая.

## 2. Энергия волны на примере поперечных колебаний струны

Волновые процессы изучаются в различных областях физики, например, электродинамике, физике плазмы, оптике, акустике, гидродинамике и т.д. Механизмы распространения возмущений в данных областях сильно различаются, однако имеются общие для всех типов волн характеристики. К ним, в частности, относятся:

- энергия;
- импульс;
- скорость распространения возмущения.

Бегущие волны подобно движущемуся объекту переносят энергию и обладают **импульсом**. Импульс – произведение массы осциллятора на проекцию скорости на ось распространения волны:

$$p = mv_x. \quad (9)$$

Для распространения волны между двумя точками пространства необходимо определенное время. Это означает, что **волны обладают конечной скоростью**. Ее величина зависит от свойств среды. При этом следует иметь в виду, что отдельные частицы не распространяются с волнами, Они колеблются относительно своих положений равновесия в поперечном или продольном направлении. В качестве волн наблюдается не распространение частиц (отдельных осцилляторов) в среде, а их фазовые соотношения. Таким образом, **скорость волны не есть скорость движения материальных ча-**

*стиц, а скорость распространения импульса, вызывающего смещение частиц.*

Для многих видов волн характерно *свойство линейности*.

*Волны называются линейными*, если они не влияют на распространение других волн и вследствие этого их совокупность представляет собой простую сумму этих волн (*принцип суперпозиции*).

Многие волны близки к линейным. Однако в общем случае волны бывают и нелинейными. Например, звуковые волны большой мощности, взаимодействие мощного электромагнитного излучения с плазмой и т.д.

Движущаяся волна, подобно любому движущемуся объекту, несет энергию от одной точки пространства к другой (от источника к приемнику). При этом перенос энергии происходит без переноса вещества среды, хотя сама среда вовлечена в волновой процесс передачи энергии. Величина энергии, переносимой волной, может меняться в широких пределах. Так, плотность потока мощности электромагнитного поля, создаваемого лазером, может составлять до  $10^{10}$  Вт/м<sup>2</sup> вблизи пробоя воздуха. Мощность же звуковых волн человеческого голоса очень незначительна. Например, интенсивность звуковых волн на пороге слышимости их человеком на частоте 1 кГц составляет всего  $10^{-12}$  Вт/м<sup>2</sup>.

Энергия волны в упругой среде состоит из кинетической энергии частиц вещества, совершающих небольшие колебания, и из потенциальной энергии упругой деформации среды. Получим соотношения, описывающие плотность упругой (потенциальной) энергии на примере растянутого (или сжатого) стержня. Для этого предположим, что к торцу стержня, второй конец которого закреплен, прикладывается растягивающая сила  $F(x)$ , медленно увеличивающаяся от 0 до значения  $F_0$ . Удлинение стержня при этом будет меняться от 0 до  $x$ . По закону Гука имеем:

$$F(x) = kx, \quad (10)$$

где  $k$  - коэффициент упругости.

Работа силы  $F(x)$  в этом процессе

$$A = \int_0^x F(x)dx = \kappa \int_0^x xdx = \frac{\kappa x^2}{2}$$

идет на увеличение упругой энергии  $U$  стержня, следовательно,

$$U = \frac{\kappa x^2}{2}. \quad (11)$$

В свою очередь, плотность упругой энергии определяется формулой

$$w_n = \frac{U}{S\ell},$$

где  $S$ ,  $\ell$  - площадь поперечного сечения и длина стержня соответственно.

С учетом данного выражения, а также используя связи

$$\kappa x = F = \sigma S, \quad \sigma = E\varepsilon, \quad \varepsilon = x / \ell,$$

где  $\varepsilon$  - относительная деформация среды;

$E$  - модуль Юнга,

выражение (11) преобразуется к виду

$$U = \frac{Fx}{2} = \frac{\sigma S \varepsilon \ell}{2} = \frac{E\varepsilon^2}{2} S\ell.$$

Из анализа данного выражения несложно заметить, что плотность упругой энергии равна

$$w_n = \frac{E\varepsilon^2}{2}. \quad (12)$$

При прохождении продольной волны в стержне каждая единица объема его обладает как потенциальной энергией упругой деформации  $w_n$ , так и кинетической энергией

$$w_k = \frac{\rho U^2}{2},$$

где  $\rho$  - линейная плотность материала стержня.

Плотность полной энергии равна

$$w = w_k + w_n = \frac{\rho U^2}{2} + \frac{E\varepsilon^2}{2}. \quad (13)$$

Для рассматриваемого тонкого стержня  $E = \rho v^2$ , следовательно, выражение (13) может быть преобразовано к виду:

$$w = \frac{\rho}{2} \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \right\}. \quad (14)$$

Анализ соотношения (14) показывает, что оба слагаемых равны друг другу, т.е. плотности кинетической и упругой энергии одинаковы и изменяются синфазно. В результате имеем

$$w = \rho U^2. \quad (15)$$

Для частного случая гармонической волны  $\xi = U_0 \cos(\omega t - kx)$  и

$$w = \rho U_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx), \quad (16a)$$

или с использованием экспоненциальной формы представления гармонической волны

$$w = -\rho U_0^2 \exp(i\omega t) \exp(-ikx) (\omega^2 + v^2 k^2). \quad (16b)$$

Соответствующее распределение энергии  $w(x)$  вдоль стержня в некоторый момент показано на рисунке 8.

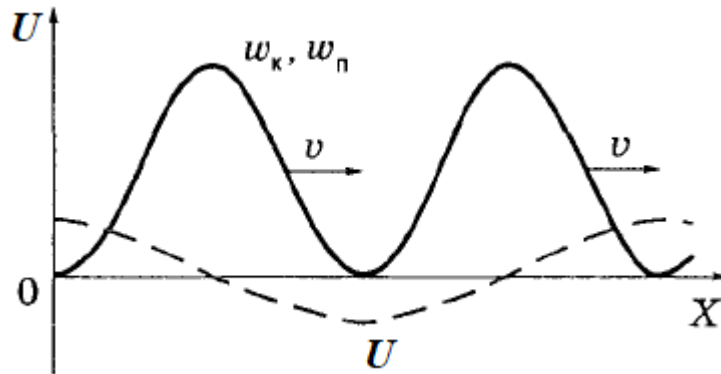


Рисунок 8 – Распределение энергии вдоль стержня в некоторый момент времени

Среднее значение плотности энергии за период (или за время значительно большее периода колебаний) равно:

$$\langle w \rangle = \frac{\rho U_0^2 \omega^2}{2}, \quad (17)$$

поскольку среднее значение квадрата синуса равно 0,5.

### 3. Плотность потока энергии

В связи с тем, что энергия перемещается в среде вместе с возмущением, вводится понятие потока энергии  $\Phi$ . **Поток энергии** – это количество энергии, переносимое волной через определенную поверхность  $S$  в единицу времени:

$$\Phi = \frac{dW}{dt}, \quad (18)$$

где  $dW$  – энергия, переносимая через данную поверхность за время  $dt$ .

Введем еще одно определение, характеризующее интенсивность потока энергии – величину плотности потока энергии. **Плотность потока энергии** – это поток энергии через единичную площадку, перпендикулярную к направлению переноса энергии:

$$j = \frac{d\Phi}{dS_{\perp}}. \quad (19)$$

Поясним формулу (19) на рисунке 9.

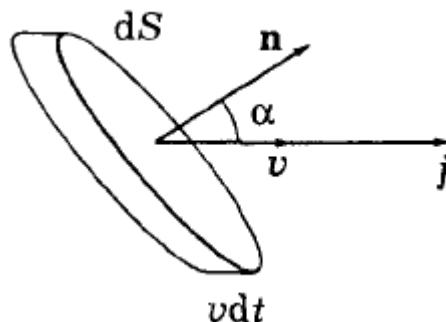


Рисунок 9 – Пояснение к формуле плотности потока энергии

$dW$  – это энергия, заключенная внутри косоугольного цилиндра с основанием площадью  $dS$  и образующей длиной  $vdt$ . Размеры цилиндра должны быть настолько малы, чтобы во всех его точках плотность энергии  $w$  была бы одинаковой. При данных предположениях можно записать:

$$dW = wvdt dS \cos \alpha = wvdt dS_{\perp}.$$

С учетом полученного выражения величина плотности потока энергии, определяемая формулой (19), принимает вид:

$$j = wv. \quad (20)$$

Для определения плотности потока и его направления вводят **вектор Умова**:

$$\vec{j} = w\vec{v}, \quad (21a)$$

где  $\vec{v}$  - вектор скорости, нормальной к волновой поверхности в данном месте.

Соотношение (21a) справедливо только для бегущей волны. Если имеется суперпозиция (наложение) несколько продольных волн, то вектор Умова принимает вид:

$$\vec{j} = -\sigma\vec{u}, \quad (21b)$$

где  $\sigma$  - напряжение (или избыточное давление);

$\vec{u}$  - вектор скорости частиц среды (не скорость волны).

Отметим, что, в свою очередь, выражение (21b) справедливо для жидких и газообразных сред, для твердых сред – только в случае тонкого стержня или тонкой пластины. Вектор Умова всегда положительный.

Для гармонической волны вектор Умова приобретает вид

$$\vec{j} = \frac{\omega}{k} \vec{n}.$$

В случае монохромной волны вектор  $\vec{j}$ , как и плотность энергии, изменяется со временем по закону квадрата синуса (16a). В связи с этим среднее по времени значение вектора Умова с учетом (17) можно записать в виде:

$$\langle \vec{j} \rangle = \frac{\rho U_0^2 \omega^2}{2} \vec{v}. \quad (22)$$

Среднее по времени значение плотности потока энергии называется **интенсивностью волны**:

$$I = \langle \vec{j} \rangle.$$

Таким образом, вектор Умова показывает направление распространения энергии волны, а его модуль – плотность потока энергии.

Для электромагнитной волны физический смысл вектора Умова имеет вектор Пойнтинга:

$$\vec{\Pi} = [\vec{E}, \vec{H}], \quad (23)$$

определяющий плотность потока мощности, а также направление распространения волны. Ориентация векторов из данного соотношения показана на рисунке 10.

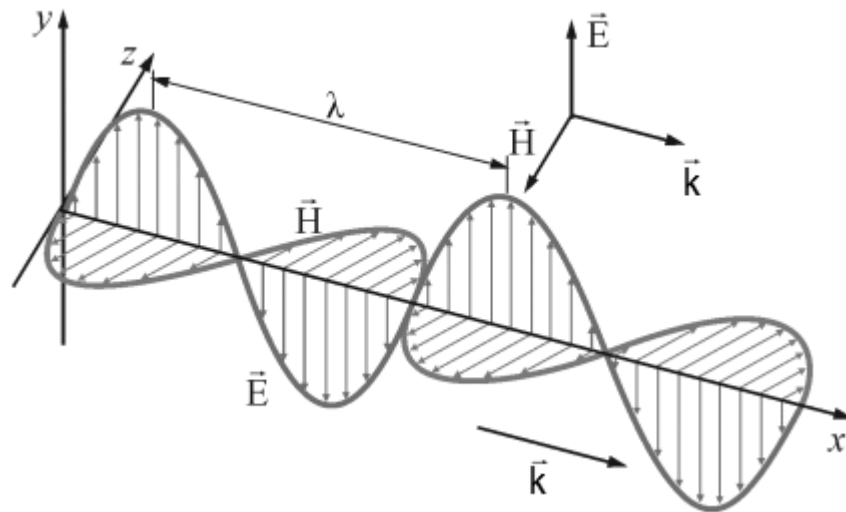


Рисунок 10 – Ориентация векторов электромагнитной волны

Среднее значение вектора Пойнтинга будет определяться выражением

$$\dot{\Pi} = \frac{1}{2}[\dot{E}, \dot{H}^*], \quad (24)$$

где символом «\*» обозначено комплексное сопряжение.

По известному вектору Умова во всех точках поверхности  $S$  можно определить поток энергии сквозь данную поверхность. С этой целью поверхность  $S$  мысленно разбивается на элементарные участки  $dS$ . Поток энергии через этот участок будет определяться выражением

$$d\Phi = j dS = j dS \cos \alpha = \vec{j} d\vec{S} = j_n dS, \quad (25)$$

где  $j_n$  - проекция вектора  $\vec{j}$  на нормаль  $\vec{n}$  к элементу поверхности  $dS$ ;

$$d\vec{S} = \vec{n} dS.$$

С учетом соотношения (25) полный поток энергии сквозь поверхность  $S$  будет описываться выражением

$$\Phi = \int_S \vec{j} d\vec{S} = \int_S j_n dS. \quad (26)$$

Физический смысл выражения (26) – поток энергии равен потоку вектор плотности потока энергии  $\vec{j}$  сквозь поверхность  $S$ .

### Лекция 3. Волновые уравнения в различных средах

*Вывод волнового уравнения поперечных волн на струне. Решение волнового уравнения. Стоячие волны и их энергия. Эффект Доплера для звуковых волн. Эффект Доплера для электромагнитных волн*

#### 1. Вывод уравнения поперечных волн на струне

Выведем волновое уравнение для поперечных бегущих волн в непрерывной среде. В качестве модели среды рассмотрим непрерывную однородную струну, левый конец которой находится в точке  $x = 0$ .

Воздействуем на конец струны поперечной гармонической силой. Геометрия задачи показана на рисунке 1.

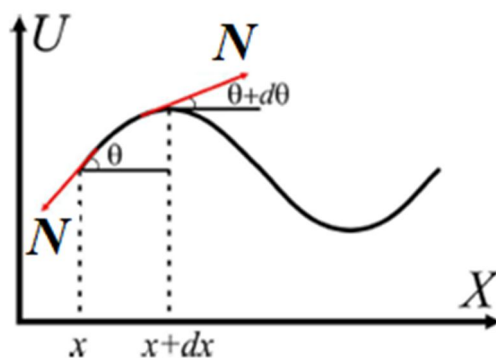


Рисунок 1 – Струна под воздействием поперечной силы

Рассмотрим вертикальное смещение  $U$  короткого отрезка струны, который можно считать простым гармоническим осциллятором. Вертикальные смещения  $U$  этого осциллятора изменяются в зависимости от времени  $t$  и координаты  $x$ . Волновое уравнение связывает данные три параметра.

Будем считать, что смещение струны происходит только в плоскости  $(x, U)$ , т.е. поперечные волны на струне плоскополяризованы, а вектор смещения  $\vec{U}$  перпендикулярен оси  $x$  в любой момент времени. При данных до-

пущениях процесс колебания можно описать одной функцией  $U(x, t)$ , характеризующей вертикальное перемещение струны.

Пусть линейная плотность струны равна  $\rho$ , а натяжение вдоль струны  $N$ . Полагаем величину натяжения постоянной величиной, не зависящей от смещения  $U$  и координаты  $x$ .

Рассмотрим участок струны длиной

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2} dx. \quad (3)$$

На одном конце элемента действует натяжение  $N$ , направленное под углом  $\theta$  к оси  $x$ , на другом – под углом  $\theta + d\theta$ . Если величина  $\frac{\partial U}{\partial x}$  мала, то

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 \ll 1.$$

В результате соотношение (3) может быть записано в виде

$$ds \approx dx.$$

При этом масса элемента струны будет определяться выражением:

$$m = \rho ds \approx \rho dx.$$

Запишем уравнение элемента струны, используя второй закон Ньютона:

$$F = m \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Сила, действующая на элемент  $ds$  в направлении положительных смещений  $U$ , будет равна

$$F = N(\sin(\theta + d\theta) - \sin \theta).$$

Для малых значений угла  $\theta$  справедливо соотношение

$$\sin \theta \approx \operatorname{tg} \theta = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

С учетом данного предположения можно записать:

$$F = N \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_x \right]. \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует, что

$$m \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = N(\sin(\theta + d\theta) - \sin \theta).$$

Следовательно, соотношение (4) может быть преобразовано к виду

$$\rho dx \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = N \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_x \right]. \quad (6)$$

Учитывая, что

$$\left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_x = \frac{\partial U}{\partial x} dx, \text{ можно записать}$$

$$F = N \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) dx.$$

Запишем уравнение (6) в виде

$$N \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} dx \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\rho}{N} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$$

Соотношение  $\frac{N}{\rho}$  имеет размерность квадрата скорости, т.е.  $\frac{N}{\rho} = \frac{1}{v^2}$ .

Следовательно, можно записать однородное волновое уравнение в виде:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \quad (7)$$

Анализ данного соотношения показывает, что волновое уравнение, относящееся к дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка гиперболического типа, связывает ускорение гармонического осциллятора в среде со второй производной его смещения по координате  $x$ . Традиционно оно записывается с использованием оператора Лапласа (лапласиана) или оператора «набла в квадрате»  $\Delta = \nabla^2$ :

$$\Delta U - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (8)$$

Уравнения вида (8), в которых правая часть равна нулю (т.е. источник волны не учитывается), называют однородными уравнениями Даламбера. При этом уравнение может быть как векторным, так и скалярным. Соотношение (8) описывает скалярное волновое уравнение.

Выражение оператора Лапласа зависит от используемой системы координат. В частном случае декартовой системы координат

$$\Delta U = \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \quad (9a)$$

Для произвольной системы координат оператор Лапласа определяется формулой:

$$\Delta \vec{F} = \nabla^2 \vec{F} = \text{grad div } \vec{F} - \text{rot rot } \vec{F}. \quad (9b)$$

Для примера приведем однородные волновые для акустической и электромагнитной волн. Для акустической волны они имеют вид:

- для колебательной скорости

$$\Delta \vec{v} - \frac{1}{V_l^2} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = 0 \quad (10a)$$

- для возмущенной акустической плотности:

$$\Delta \rho_a - \frac{1}{V_l^2} \frac{\partial^2 \rho_a}{\partial t^2} = 0, \quad (10b)$$

где  $V_l$  - скорость распространения продольной волны;

$\rho_a$  - возмущенная акустическая плотность среды.

Для монохромной электромагнитной волны имеют вид:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (11a)$$

$$\Delta \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0, \quad (11b)$$

где  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu}}$  - скорость электромагнитной волны в среде;

$\varepsilon_0 = 1 / (36\pi) \cdot 10^{-9}$  Ф/м – электрическая постоянная;

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная;

$\varepsilon$ ,  $\mu$  – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

Анализ приведенных выражений показывает однотипность их записи, что подтверждает общность их физических законов.

## 2. Решение волнового уравнения

Как известно из курса математики, решением волнового уравнения (8) являются две функции, описывающие приходящую и уходящую волны, вида:

$$U = f_1(vt - x), \quad U = f_2(vt + x), \quad (12a)$$

или записанное в виде полного решения как суперпозиции частных решений

$$U = f_1(vt - x) + f_2(vt + x). \quad (12б)$$

Преобразуем один из видов решения (12a), используя соотношения:

$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda} v = 2\pi f; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}.$$

В результате получаем:

$$\begin{aligned} U(x, t) &= A \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x)\right) = A \exp\left(i 2\pi \left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right) = \\ &= A \exp\left(i \omega \left(t - \frac{x}{v}\right)\right) = A \exp(i \omega t - i k x) = A \exp(i \omega t) \exp(-i k x). \end{aligned} \quad (13)$$

Выполним анализ полученного вида решения. Амплитуда  $A$  определяет интенсивность колебаний. Первый экспоненциальный сомножитель  $\exp(i \omega t)$  описывает гармонические колебания во времени источника. Второй экспоненциальный сомножитель  $\exp(-i k x)$  описывает фазу бегущей волны. Направление распространения зависит от знака в показателе экспоненты. Знак «минус» соответствует волне, распространяющейся вдоль оси  $Oz$  в положительном направлении. Знак «плюс» – волне, распространяющейся в противоположном направлении. Иллюстрация данного процесса показана на рисунке 2.

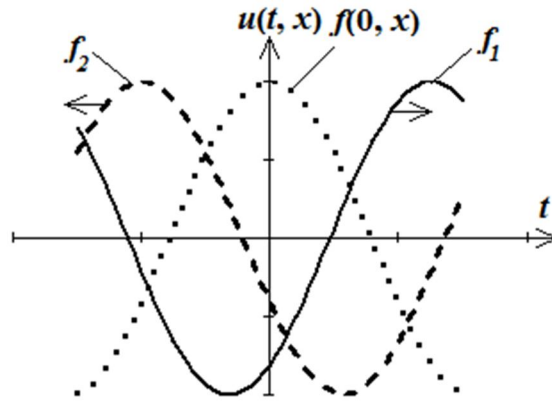


Рисунок 2 – Иллюстрация решения волнового уравнения

Для упругих волн справедлив **принцип суперпозиции**:

если две волны являются решением волнового уравнения, то решением является и их линейная комбинация.

Рассмотрим другой частный случай волнового уравнения, который дает нам возможность составить решение.

Положим, что источники электромагнитного поля имеют точечный характер. Для точечного источника поле и все его характеристики являются функциями только расстояния  $r$  от точки, где находится источник поля, до точки наблюдения и не зависит от угловых координат. Поэтому в сферической системе координат волновое уравнение (7) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (14)$$

После введения функции  $w = ur$  уравнение (14) сводится к уравнению (8), но записанному относительно функции  $w$  и расстояния  $r$ :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (15)$$

Пользуясь результатами решения (14), можно записать, что в случае точечных источников решение описывается функцией

$$u(x, t) = \frac{1}{2} f_1\left(x - \frac{r}{v}\right) + \frac{1}{r} f_2\left(x + \frac{r}{v}\right). \quad (16)$$

Как и ранее аргументы функций  $f_1$  и  $f_2$ , как видно из (16), «распространяются» в направлении радиуса  $r$  со скоростью  $c$  и  $-c$  и имеют одинаковые значения во всех точках одного и того же радиуса, т.е. на сфере. Таким образом, решение (16) представляет собой совокупность сферических волн, т.е. волн, у которых волновые поверхности, или поверхности равных фаз, суть сферы. Причем первое частное решение  $\frac{1}{2}f_1\left(x - \frac{r}{v}\right)$  описывает волну, которая распространяется со скоростью  $c$  от центра возмущения в бесконечность. Эта волна носит название *расходящейся волны*. Второе частное решение  $\frac{1}{r}f_2\left(x + \frac{r}{v}\right)$  описывает волну, которая движется с той же скоростью из бесконечности к центру и называется *сходящейся волной*. Таким образом, решение имеет волновой характер. С математической точки зрения оба решения волновых уравнений – функции  $f_1$  и  $f_2$  – совершенно равноправны. Однако с точки зрения физической реализации только функция  $f_1$  удовлетворяет условию излучения и, следовательно, имеет физический смысл.

Отметим существенную особенность функций, описывающих волновые процессы. Они всегда содержат множители вида  $f\left(t \pm \frac{r}{v}\right)$ , характер зависимости которых от расстояния в фиксированный момент времени повторяет характер зависимости от времени в фиксированной точке пространства.

### 3. Стоячие волны и их энергия

Если две волны, приходящие в какую-либо точку пространства, обладают постоянной разностью фаз, такие *волны* называются *когерентными*. При сложении когерентных волн возникает *явление интерференции*.

Одним из важных случаев интерференции является случай наложения двух встречных плоских волн с одинаковой амплитудой, приводящий к возникновению колебательного процесса, называемого *стоячей волной*.

Пусть две гармонические волны с одинаковой частотой  $\omega$  и амплитудой  $U_0$  распространяются в противоположных направлениях оси  $Ox$ :

$$U_1 = U_0 \exp(i\omega t - kx) \text{ и } U_2 = U_0 \exp(-i\omega t + kx).$$

При записи приведенных соотношений для простоты понималось, что начальные фазы колебаний равны нулю. Суперпозиция волн дает

$$\begin{aligned} \exp(i\omega t - kx) &= \cos(\omega t - kx) + i \sin(\omega t - kx) \\ + \exp(-i\omega t + kx) &= \cos(\omega t - kx) - i \sin(\omega t - kx) \end{aligned}$$

---


$$2 \cos(\omega t - kx)$$

или

$$\begin{aligned} \exp(i\omega t - kx) &= \cos(\omega t - kx) + i \sin(\omega t - kx) \\ - \exp(-i\omega t + kx) &= -\cos(\omega t - kx) + i \sin(\omega t - kx) \end{aligned}$$

---


$$+2i \sin(\omega t - kx)$$

В результате можно записать **уравнение стоячей волны**

$$\begin{aligned} U_1 &= U_0 \exp(i\omega t - kx) + U_0 \exp(-i\omega t + kx) = 2U_0 \cos(\omega t - kx) = \\ &= 2U_0 \cos(\omega t) \cos(kx) + 2U_0 \sin(\omega t) \sin(kx). \end{aligned} \quad (17a)$$

Для представления волн в виде косинусов получаем:

$$2U_0 \cos(\omega t - kx) + 2U_0 \cos(\omega t + kx) = 2U_0 \cos(\omega t) \cos(kx). \quad (17b)$$

На рисунке 3 проиллюстрировано распределение амплитуды точек для стоячей волны.

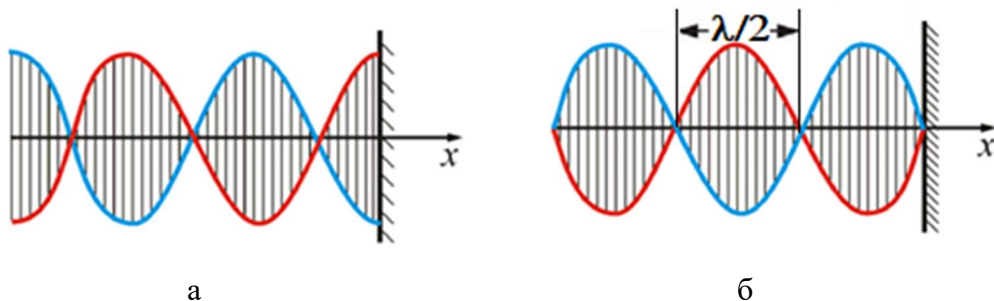


Рисунок 3 – Иллюстрация распределения амплитуд в стоячей волне:

*а* – при сложении двух волн; *б* – при вычитании двух волн

Анализ уравнения стоячей волны (17), а также рисунка 3 показывает, что в точках, где  $|\cos(kx)| = 1$  наблюдаются максимумы (*пучности волны*), а где  $\cos(kx) = 0$  - минимумы, т.е. *узлы*. Период  $|\cos(kx)| = \pi$ . В связи с этим

$$k\Delta x = \pi \text{ и } \Delta x = \pi / k = \lambda / 2.$$

Таким образом, интервалы между соседними пучностями или узлами равны половине длины волны ( $\lambda / 2$ ).

Между двумя соседними узлами все точки среды колеблются синфазно, при переходе же через узел фаза изменяется на  $\pi$ , т.е. колебания по разные стороны узла (в пределах полуволны) происходят в противофазе. Узлы смещения как бы разделяют среды на автономные области, в которых гармонические колебания совершаются независимо. Никакой передачи движения из одной области в другую, а значит, и перетекания энергии через узлы не происходит. Другими словами, вдоль оси  $Ox$  распространения возмущения не происходит. В связи с этим возмущения, описываемые уравнениями (17) называют *стоячей волной*.

Следует отметить, что если амплитуды волн немного различаются, то бегущие в разных направлениях волны не точно компенсируют друг друга и не образуют идеальных узлов с нулевой амплитудой. В этом случае вводится понятие *коэффициента стоячей волны*:

$$КСВ = \frac{U_{\text{пад}} + U_{\text{отр}}}{U_{\text{пад}} - U_{\text{отр}}} = \frac{1 + |R|}{1 - |R|}, \quad (19)$$

где  $|R| = \frac{U_{\text{отр}}}{U_{\text{пад}}}$  - модуль коэффициента отражения.

Поскольку из физических соображений  $|R| \leq 1$ , то  $КСВ \geq 1$ .

Переходя к распределению энергии в стоячей волне, запишем выражения для скорости частиц среды  $v = \partial U / \partial t$  и ее относительной деформации  $\varepsilon = \partial U / \partial x$ :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -2U_0 \cos(kx) \sin(\omega t), \quad (18a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -2U_0 \sin(kx) \cos(\omega t). \quad (185)$$

Анализ соотношений (18) показывает, что обе величины ( $v$  и  $\varepsilon$ ) тоже являются стоячими волнами, причем они сдвинут относительно друг друга по фазе на  $\pi/2$  как в пространстве, так и во времени. Кроме того, узлы и пучности скорости  $v$  частиц среды совпадают с узлами и пучностями их смещения  $U$ . Узлы же и пучности деформации  $\varepsilon$  совпадают соответственно с пучностями и узлами смещения. Сказанное проиллюстрировано на рисунке 4 для моментов времени  $t=0$  и  $t=T/4$ . Узлы смещения отмечены жирными точками. В момент  $t=0$ , когда  $U$  и  $\varepsilon$  становятся максимальными, скорость  $v$  обращается в нуль, и, наоборот (при  $t=T/4$ ).

Соответственно происходят превращения энергии стоячей волны: то полностью в потенциальную (упругую), то полностью в кинетическую (аналогичное происходит при колебаниях маятника). На рисунке 5 показано распределение плотности энергии в моменты  $t=0$  и  $t=T/4$ .

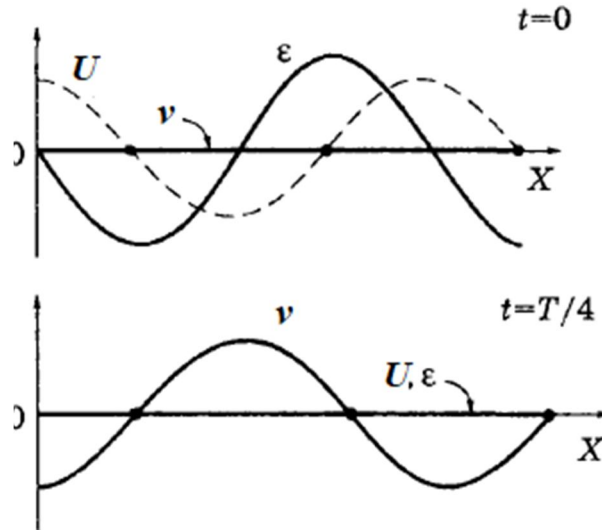


Рисунок 4 – Иллюстрация распределения амплитуды смещения частиц и скорости из колебаний

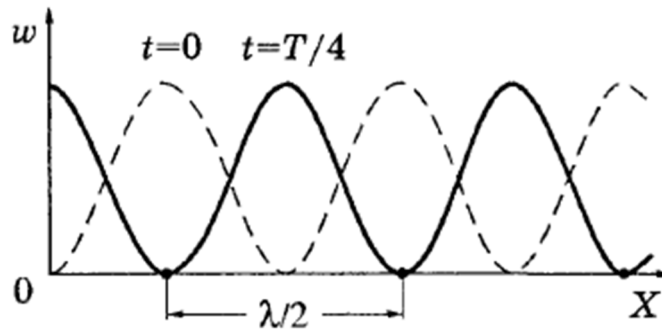


Рисунок 5 – Распределение плотности энергии в моменты  $t = 0$  и  $t = T / 4$

В процессе колебаний происходит перетекание энергии от каждого узла к соседним с ним пучностям и обратно. Средний же по времени поток энергии в любом сечении стоячей волны равен нулю.

Рассмотрим частный случай колебания в натянутой струне, закрепленной с обоих концов.

В этом случае при возбуждении какого-либо произвольного поперечного возмущения возникнет довольно сложное нестационарное движение. Стационарное движение в виде стоячей волны возможно лишь при вполне определенных частотах. Это связано с тем, что на закрепленных концах струны должны выполняться определенные **граничные условия**: в них смещение  $U$  все время должно равняться нулю.

Значит, если в струне возбуждается стоячая волна, то концы струны должны быть ее узлами. Отсюда следует, что на длине струны  $\ell$  должно укладываться целое число  $n$  полуволн, т.е.

$$\ell = n \frac{\lambda}{2}.$$

Из данного условия находим возможные длины волн и соответствующие им частоты:

$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (19a) \qquad f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2\ell} n, \quad (19b)$$

где  $v$  - фазовая скорость волны.

Частоты  $f_n$  называются **собственными частотами** струны. Частоту  $f_1 (n = 1)$  называют **основной частотой**, остальные частоты  $f_2, f_3, \dots$

( $n = 2, 3, \dots$ ) - **обертнами**. Распределение колебаний вдоль струны на собственных частотах показано на рисунке 6.

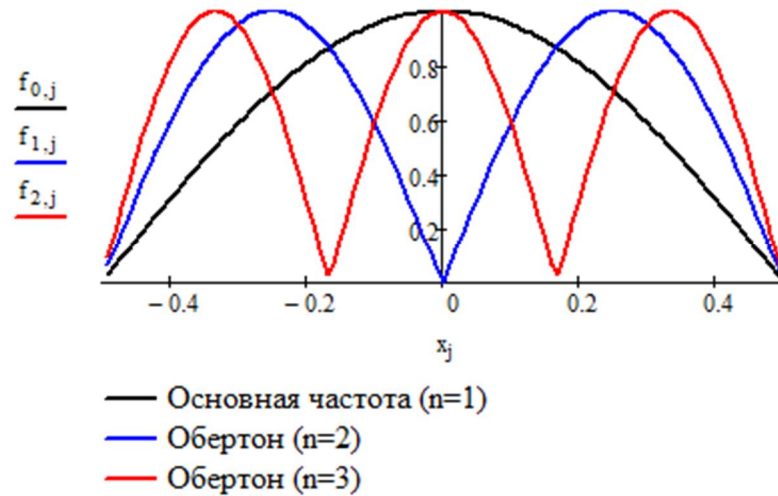


Рисунок 6 – Распределение колебаний вдоль струны на собственных частотах

Гармонические колебания с частотами (19б) называют **собственными колебаниями**, или **гармониками**. В общем случае колебания струны представляют собой суперпозицию различных гармоник (**спектр**).

Колебания струны примечательным тем, что в рамках классической физики возникает дискретный спектр одной из величин (частоты).

Описанные закономерности относятся не только к струне, но и к стержням, закрепленным различным образом – в середине, на одном конце и т.д. Отличие заключается лишь в том, что свободный конец стержня является пучностью. Общее число полуволен, устанавливаемых на стержне, увеличивается по сравнению с натянутой струной. Получается, на длине стержня укладывается на четверть волны больше, т.е.

$$\ell = n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}.$$

Отсюда возможные значения собственных частот будет определяться выражением

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{4\ell} (2n + 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Это касается как поперечных, так и продольных колебаний.

#### 4. Эффект Доплера для звуковых волн

Известно, что при приближении к неподвижному наблюдателю быстро движущегося электропоезда его звуковой сигнал кажется более высоким, а при удалении от наблюдателя – более низким чем сигнал того же электропоезда, но неподвижного.

*Эффектом Доплера* называют изменение частоты волн, регистрируемых приемником, вследствие движения источника этих волн и приемника.

Данный эффект наблюдается при распространении звуковых волн (акустический эффект) и электромагнитных волн (оптический эффект).

Рассмотрим более подробно акустический эффект Доплера.

Пусть источник, находящийся в газе или жидкости, испускает короткие импульсы с частотой  $f$ . Если источник и приемник покоятся относительно среды, в которой распространяется волна, то частота воспринимаемых приемником импульсов будет равна частоте  $f$  источника. Если же источник, или приемник, или оба движутся относительно среды, то частота  $f'$ , воспринимаемая приемником, вообще говоря, оказывается отличной от частоты источника, т.е.  $f' \neq f$ .

Рассмотрим случай, когда источник  $S$  и приемник  $P$  движутся вдоль проходящей через них прямой с постоянными скоростями  $u$  и  $u'$  соответственно (относительно среды).

Если бы двигался только источник навстречу приемнику, испуская импульсы с периодом  $T = 1/f$ , то за это время очередной импульс пройдет относительно среды расстояние  $\lambda = vT$ , где  $v$  - скорость волн в среде, и пока будет испущен следующий импульс, источник «нагонит» предыдущий импульс на расстоянии  $uT$ , как показано на рисунке 7.

Таким образом, расстояние между импульсами в среде станет равным

$$\lambda' = vT - uT,$$

и воспринимаемая неподвижным приемником частота (число импульсов за единицу времени) будет определяться соотношением:

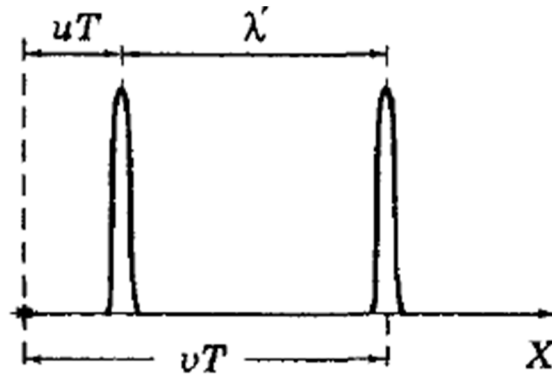


Рисунок 7. – Пояснение эффекта Доплера

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{T(v-u)}. \quad (20)$$

Если же движется и приемник (пусть навстречу источнику), то импульсы относительно приемника будут иметь скорость  $v + u'$ , и число воспринимаемых за единицу времени импульсов будет описываться формулой:

$$f' = \frac{v + u'}{\lambda'} = f \frac{v + u'}{v - u}. \quad (21)$$

Несложно заметить, что при движении как источника, так и приемника в противоположных направлениях, знаки перед  $u'$  и  $u$  надо поменять на обратные. Напомним, что скорости  $u'$  и  $u$  – это скорости приемника и источника *относительно среды*.

Анализ приведенных соотношений позволяет сделать вывод о том, что эффект Доплера является следствием «уплотнения» (или разряжение) импульсов, обусловленного движением источника и приемника.

Обычно соотношение (21) записывают в более удобном виде:

$$f' = f \frac{v - u'_x}{v - u_x}. \quad (22)$$

где  $u'_x$ ,  $u_x$  - проекции скоростей приемника и источника на ось  $Ox$ , проходящую через них и положительное направление которой совпадает с направлением распространения импульсов, т.е. от источника  $S$  к приемнику  $P$ .

Соотношение (22) при определенных дополнительных условиях может быть использовано и в более сложных случаях, а именно, когда источник и приемник движутся не по одной прямой и с изменяющимися во времени ско-

ростями  $\vec{u}(t)$  и  $\vec{u}'(t)$ . В этих случаях необходимо учитывать так называемый **эффект запаздывания**. Поскольку скорость передачи сигналов конечна, воспринимаемая приемником частота  $f'$  в момент времени  $t$  будет обусловлена приходом в этот момент сигналов, испущенных источником в предшествующий момент  $t' = t - \tau$ , где  $\tau$  - время, необходимое для прохождения расстояния  $\ell$  от источника в момент  $t' = t - \tau$  до приемника в момент  $t$ , т.е.  $\tau = \ell / v$ .

Вместе с тем, в некоторых случаях эффектом запаздывания можно пренебречь. К ним, в частности относится случай, когда скорости источника и приемника значительно меньше скорости звука (и при разумных расстояниях между источником и приемником).

## 5. Эффект Доплера для электромагнитных волн

Как было показано ранее, изменение частоты звуковых сигналов, обусловленное эффектом Доплера, определяется скоростями движения источника и приемника относительно среды, являющейся носителем звуковых волн. Для электромагнитных волн особой среды, которая служила бы их носителем, нет. В связи с этим доплеровское смещение частоты электромагнитных волн определяется только скоростью источника **относительно приемника**.

Поясним сказанное на примере. Пусть в  $K$ -й системе отсчета находится неподвижный приемник  $P$ , как показано на рисунке 8.

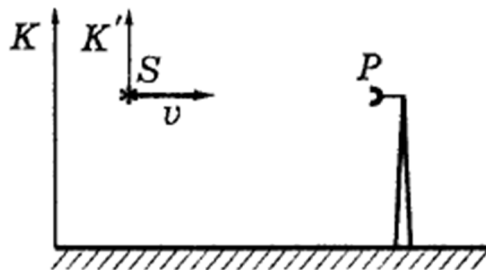


Рисунок 8 – Геометрия задачи для эффекта Доплера для электромагнитных волн

К нему с релятивистской скоростью  $v$  приближается  $S$ -источник периодических электромагнитных (или световых) волн. В  $K'$ - системе отсчета, свя-

занной с источником, волны испускаются с частотой  $f_0$  (собственная частота). Необходимо найти частоту  $f$ , с которой воспринимаются эти волны приемником.

Промежуток времени между двумя последовательными импульсами в  $K'$ - системе, связанной с источником, равен  $T = 1 / f_0$ . Поскольку источник движется со скоростью  $v$ , то соответствующий промежуток времени в  $K$ - системе, согласно «эффекту замедления хода движущихся часов», будет больше:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (23)$$

Расстояние между соседними импульсами в  $K$ - системе

$$\lambda = cT - vT = \frac{(c - v)T_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (24)$$

С учетом данного соотношения несложно получить, что воспринимаемая приемником частота  $f = c / \lambda$  равна

$$f = f_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - v / c}. \quad (25)$$

Если источник приближается, как в рассматриваемом случае, то  $f > f_0$ , если же удаляется, то  $f < f_0$  (в этом случае знак в знаменателе (25) изменяется на противоположный).

Соотношение (25) описывает **продольный эффект Доплера**. Для электромагнитных волн эффект Доплера является следствием двух явлений: замедления хода движущихся часов (корень в числителе выражения (25)) и «уплотнения» (или разрежения) импульсов, связанного с изменением расстояния между источником и приемником.

Следует отметить, что наряду с продольным эффектом Доплера наблюдается и **поперечный эффект Доплера**, определяемый формулой

$$f = f_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (26)$$

Данный эффект может наблюдаться при движении источника по некоторым углом  $\alpha$  с линией наблюдения, как показано на рисунке 9.

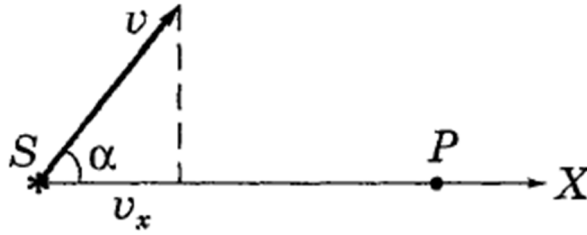


Рисунок 9 – Общий случай движения источника (пояснение поперечного эффекта Доплера)

В этом случае в формуле (25) необходимо заменить скорость  $v$  не ее проекцию  $v_x = v \cos \alpha$ . Тогда

$$f = f_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - v_x / c}. \quad (27)$$

В процессе движения проекция скорости  $v_x$  изменяется. В связи с этим необходимо учесть эффект запаздывания. Воспринимаемая приемником  $P$  частота  $f$  в момент времени  $t$  будет обусловлена волнами, испущенными источником  $S$  в предшествующий момент  $t' = t - \ell / c$ , где  $\ell$  - расстояние от источника  $S$  до  $P$  в момент  $t'$ . В связи с этим значение  $v_x$  определяется в момент  $t'$ . Таким образом, частоте  $f(t)$  соответствует проекция скорости  $v_x(t')$ .

Поперечный эффект Доплера (26) наблюдается при  $\alpha = 90^\circ$ , когда  $v_x = 0$ . При нем воспринимаемая приемником частота всегда меньше собственной частоты источника, т.е.  $f < f_0$ . Поперечный эффект является прямым следствием замедления хода движущихся часов. Эффект значительно слабее продольного, поскольку зависит от коэффициента замедления  $v / c$  не в первой степени, а во второй.

В нерелятивистском случае  $v \ll c$ . Тогда можно считать, что  $T = T_0$  и воспринимаемая частота будет определяться соотношением:

$$f = \frac{f_0}{1 - v_x / c} \approx f_0 (1 + v_x / c). \quad (28)$$

Из соотношения (28) вытекает, что относительное изменение частоты будет определяться формулой:

$$\frac{f - f_0}{f_0} = \frac{\Delta f}{f} = \frac{v_x}{c}. \quad (29)$$

При  $v_x > 0$  (источник приближается)  $\Delta f / f > 0$ . Если же  $v_x < 0$  (источник удаляется), то  $\Delta f / f < 0$ .

Эффект Доплера нашел многочисленные практические приложения. В частности, с его использованием разработаны радиолокационные методы измерения скорости самолетов, ракет, автомашин и т.д.

## РАЗДЕЛ 2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН

### Лекция 4. Фазовая скорость распространения в различных средах.

#### Импеданс

*Фазовая скорость колебаний в различных средах. Понятие импеданса для акустических волн. Понятие импеданса для электромагнитных волн.*

#### 1. Фазовая скорость колебаний в различных средах

Бегущие волны подобно движущемуся объекту переносят энергию и обладают **импульсом**. Для распространения волны между двумя точками пространства необходимо определенное время. Это означает, что **волны обладают конечной скоростью**. Ее величина зависит от свойств среды. При этом следует иметь в виду, что отдельные частицы не распространяются с волнами, они колеблются относительно своих положений равновесия в поперечном или продольном направлении. В качестве волн наблюдается не распространение частиц (отдельных осцилляторов) в среде, а их фазовые соотношения. Таким образом, скорость волны не есть скорость движения материальных частиц, а скорость распространения импульса, вызывающего смещение частиц.

При волновом движении **различают три типа скорости**, представляющие различные физические величины:

1. **Скорость частиц** – скорость гармонических колебаний осциллятора около положения равновесия.
2. **Волновая (фазовая) скорость** – скорость распространения в среде поверхностей с одинаковой фазой.
3. **Групповая скорость** – скорость распространения группы волн (или волнового пакета).

Рассмотрим более подробно понятие фазовой скорости. Для этого зафиксируем какое-либо значение фазы волны и проследим, с какой скоростью фаза будет перемещаться вдоль оси  $Ox$ :

$$\omega \left( t - \frac{x}{v_{\phi}} \right) = \text{const} . \quad (1)$$

Уравнение (1) дает связь между временем  $t$  и тем значением  $x$ , где зафиксированное значение фазы будет в данный момент времени. Следовательно, выражение  $\frac{dx}{dt}$  - это есть *скорость перемещения фазы волны*. По-

скольку  $\omega = \text{const}$ , то  $t - \frac{x}{v_{\phi}} = \text{const}$ . Возьмем производную по времени от обеих частей равенства:

$$1 - \frac{1}{v_{\phi}} \frac{dx}{dt} = 0 .$$

Отсюда получаем выражение для фазовой скорости

$$v_{\phi} = \frac{dx}{dt} . \quad (2)$$

При решении некоторых задач получается, что фазовая скорость больше скорости света. Это возможно, поскольку скорость перемещения фазы это не скорость передачи (распространения) энергии, которая не может распространяться со скоростью большей скорости света.

Оценим, как фазовая скорость связана со свойствами среды, в которой она распространяется. Для этого определим фазовую функцию через аргумент волновой функции:

$$\varphi(x, t) = \omega t - kx . \quad (3)$$

Соотношение между  $x$  и  $t$  для точек постоянной фазы определяется из равенства полного дифференциала от фазы нулю, т.е.

$$d\varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) dt + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx = \omega dt - k dx = 0 .$$

Откуда с учетом (2) можно записать:

$$v_{\phi} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} . \quad (4)$$

Для электромагнитных волн волновое число связано со свойствами среды соотношением

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}.$$

Поставляя его в формулу (4) и проводя несложные преобразования, получаем:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}, \quad (5)$$

где  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8$  м/с – скорость света в вакууме.

Для упругих волн фазовая скорость также зависит от свойств среды, в которой она распространяется. Так, при распространении продольной волны в тонком стержне фазовая скорость определяется через плотность материала  $\rho$  и модуль Юнга  $E$ :

$$v_\phi = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (6)$$

Фазовая скорость поперечных упругих волн в неограниченной изотропной среде также будет зависеть от ее плотности и модуля сдвига среды  $G$ :

$$v_\phi = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (7)$$

Аналогичное выражение может быть получено и для фазовой скорости распространения продольной акустической волны (скорости звука):

- в твердой среде:

$$v_\phi = V_\ell = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} \quad \text{или} \quad v_\phi = \sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\rho_0(1+\sigma)(1-2\sigma)}}, \quad (8a)$$

- в жидкой среде:

$$v_\phi = V_\ell = \sqrt{\frac{K}{\chi \rho_0}}, \quad (8b)$$

- в газообразной среде:

$$v_{\phi} = V_{\ell} = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}. \quad (8\text{в})$$

Скорость распространения сдвиговой (поперечной) акустической волны определяется соотношением:

$$v_{\phi} = V_{\ell} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}, \quad (8\text{г})$$

где  $\rho_0$  - удельная плотность среды;

$K$  – модуль объемной упругости среды;

$\chi$  - коэффициент сжимаемости жидкости;

$\gamma = c_p / c_v$  - показатель адиабаты – отношение удельных теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме;

$p_0$  - давление газа;

$\sigma$  - коэффициент Пуассона;

$\mu$  - модуль сдвига.

Анализ приведенных соотношения для определения фазовой скорости волны при ее распространении показывает, что величины фазовой скорости обратно пропорционально «плотности» среды: чем среда плотнее, тем фазовая скорость меньше. Подтвердим сказанное выше примерами (см. таблицу 1).

Таблица 1 – Зависимость скорости распространения продольной акустической волны от свойств среды

Среда	Модуль объемной упругости $K$	Удельная плотность $\rho$	Скорость звука $V_{\ell}$
воздух	$1,4 \cdot 10^5$	1,3	331,2
вода	$2,127 \cdot 10^9$	1000	1 458
сапфир	$4,92 \cdot 10^{11}$	3990	11 100
ртуть	$26.31579 \cdot 10^9$	13 500	1 396

## 2. Понятие импеданса для акустических волн

Рассмотрим еще один параметр, описывающий распространение колебательных процессов в различных средах.

Для акустических волн связь между амплитудами акустического давления  $p_a$  и колебательной скорости  $v$  волны определяется **акустическим сопротивлением среды или характеристическим импедансом**:

$$Z_a = \frac{p_a}{v}, \quad \left[ \frac{\text{давление}}{\text{скорость}} \right] = \left[ \frac{\text{н} / \text{м}^2}{\text{м} / \text{с}} \right] = \left[ \frac{\text{н}}{\text{м}^3 \text{с}} \right] = \left[ \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \text{с}} \right] \quad (9)$$

Соотношение (9) справедливо как для продольных, так и для сдвиговых акустических волн, распространяющихся в упругой среде, причем не только плоских волн.

При нормальном атмосферном давлении воздуха и температуре  $t = 20^\circ\text{C}$  акустическое сопротивление воздуха равно  $Z_a = 420 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \text{с}}$ .

В расходящихся сферических и цилиндрических волнах акустическое давление и колебательная скорость частиц среды изменяются синфазно, и акустическое сопротивление становится комплексным:

$$\dot{Z}_a = R_a + jX_a = |\dot{Z}_a| \exp(j\varphi), \quad (10)$$

где  $\varphi$  - сдвиг по фазе между давлением  $p_a$  и колебательной скоростью частиц среды  $v$ .

Для сферической волны модуль акустического сопротивления равен:

$$|\dot{Z}_a| = \rho_0 V_\ell \cos \varphi, \quad \text{tg } \varphi = \frac{1}{kr} \quad (11)$$

не превышает акустического сопротивления этой же среды для плоской волны.

Для цилиндрической волны

$$|\dot{Z}_a| = \rho_0 V_\ell \cos \varphi, \quad \text{tg } \varphi = \frac{1}{\sqrt{2kr}}. \quad (10)$$

Разность фаз в сферических и цилиндрических волнах быстро уменьшается с ростом расстояния  $r$  и увеличение частоты ( $k = 2\pi f / c$ ). В дальней зоне ( $r \gg \lambda$ ) сдвиг фаз  $\varphi = 0$ , акустическое сопротивление становится вещественным и равным по величине акустическому сопротивлению среды для плоской волны.

При распространении акустической волны в реальной среде наблюдается затухание амплитуды волны. Основной причиной затухания является внутреннее трение, действующее на частицы среды. В основе внутреннего трения лежит запаздывающий по времени (релаксационный) процесс, влияющий на поглощение волн в ограниченной полосе частот (многоатомные газы, органические жидкости). Вне области особого релаксационного поглощения при вычислении коэффициента затухания учитывается лишь основная сдвиговая вязкость. Потери теплопроводности ввиду малости коэффициента теплопроводности незначительны, и ими обычно пренебрегают. Формула для расчета коэффициента затухания на заданной частоте для продольных акустических волн имеет вид:

$$\alpha = \frac{2\omega^2 \eta}{3\rho_0 V_\ell^3}, \quad (12)$$

где  $\eta$  - коэффициент сдвиговой вязкости среды.

Поглощение удобно характеризовать коэффициентом затухания, имеющим размерность децибел на метр (дБ/м):

$$\alpha [\text{дБ/м}] = 20 \lg(e\alpha) [1/\text{м}] = 8,686\alpha [1/\text{м}]. \quad (14)$$

Следует отметить, что поглощение акустической волны из-за потерь на внутреннее трение меняется пропорционально квадрату частоты и обратно пропорционально кубу скорости ее распространения. Поскольку сдвиговые волны обычно имеют скорость около половины скорости распространения продольных волн в том же материале, следует ожидать, что поглощение сдвиговых волн на единицу пути будет значительно больше, чем продольных.

Для сферических и цилиндрических волн потери связаны еще и с их геометрической расходимостью. Изменение уровня интенсивности для них будет описываться формулой:

$$L = 20 \lg \left( \frac{p_{a2}}{p_{a1}} \right) = 20n \lg \left( \frac{r_1}{r_2} \right) - r\alpha, \quad (15)$$

где  $r_1, r_2$  - расстояния;

$$n = \begin{cases} 1/2 & \text{для цилиндрических волн,} \\ 1 & \text{для сферических волн.} \end{cases}$$

Кроме перечисленных выше факторов в реальных средах на распространение волн влияют также различного рода неоднородности.

**Неоднородностью** называется область среды, параметры которой отличаются от параметров окружающего пространства.

Наличие неоднородностей в среде приводит к дополнительному уменьшению интенсивности акустических волн в заданном направлении распространения за счет рассеяния энергии в разных направлениях. Интенсивность рассеянного поля и его пространственного распределение существенно зависит от соотношения размеров неоднородностей и длины волны облучающего поля. Например, для простейшей модели рассеивателя в виде сферы радиуса много меньше длины волны (задача Релея) решение задачи рассеяния определяет интенсивность рассеянных волн в дальней зоне в следующем виде:

$$J_{\text{рас}} = J_{\text{пад}} \frac{\omega^4 a^6}{9V_\ell^4 r^2} \left( 1 + \frac{3}{2} \cos \alpha \right)^2, \quad (16)$$

где  $a$  – радиус сферы;

$r$  – расстояние от центра сферы до точки наблюдения;

$\alpha$  - угол между направлением в точку наблюдения и прямой, соединяющей удаленный источник облучения и сферу;

выражение в скобках из (14) определяет угловое распределение рассеянного поля.

В реальных средах рассеиватели имеют более сложный вид, а также случайно распределены в пространстве. Вследствие этого картина рассеянного поля становится более сложной по сравнению с описанной в (16), а потери - выше.

### 3. Понятие импеданса для электромагнитных волн

Понятие электромагнитного импеданса для электромагнитных волн рассмотрим на примере распространения плоской электромагнитной волны, например,  $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \mu H_z$ , вдоль положительного направления оси  $OX$ , как показано на рисунке 1. Для нее можно записать составляющие электромагнитного поля:

$$E_y = E_{y0}(\omega t - x / v_\phi), \quad H_z = H_{z0}(\omega t - x / v_\phi), \quad (17)$$

где  $E_{y0}$ ,  $H_{z0}$  - некоторые функции, характеризующие форму волны

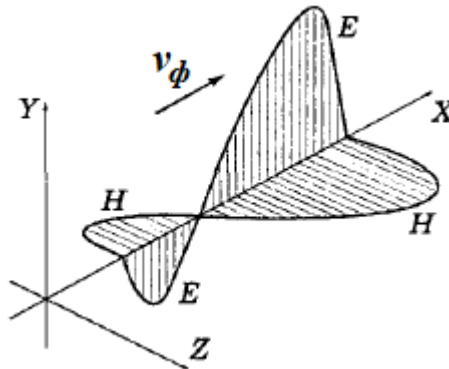


Рисунок 1 – Распространение плоской электромагнитной волны

Введя обозначения  $\varphi = t - x / v_\phi$ , найдем производные  $E_y$  по  $x$  и  $H_z$  по  $t$ :

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \varphi} \left( -\frac{1}{v_\phi} \right), \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \cdot 1.$$

Подставляя первое из полученных выражений в соотношение, описывающее плоскую волну, получаем

$$\frac{1}{v_\phi} \frac{\partial E_y}{\partial \varphi} = \mu_0 \mu \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}.$$

Учитывая выражение  $v_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}}$  для фазовой скорости электромагнитной волны, приведенное в п.1, получаем

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{\partial E_y}{\partial \varphi} = \sqrt{\mu_0 \mu} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}.$$

Откуда несложно получить выражение для **импеданса при описании процесса распространения электромагнитных волн**

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E_y = \sqrt{\mu_0 \mu} H_z \quad \Rightarrow \quad \frac{E_y}{H_z} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_a, \quad (18)$$

где  $\varepsilon$ ,  $\mu$  - относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды;

$$Z_0 = W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \text{ - волновое сопротивление свободного про-}$$

странства (вакуума).

Размерность импеданса для электромагнитных волн следующая:

$$\left[ \frac{\text{напряженность электрического поля}}{\text{напряженность магнитного поля}} \right] = \left[ \frac{B / \text{м}}{A / \text{м}} \right] = \left[ \frac{B}{A} \right] = [Ом]$$

Следует отметить, что при описании процесса распространения электромагнитных волн для выражения (18), связывающего между собой отдельные скалярные компоненты векторов напряженности электрического и магнитного полей применяется понятие **волнового (характеристического) сопротивления**. Понятие импеданс распространяется на тензор, связывающий между собой компоненты электрического и магнитного полей, например, на границе раздела сред.

Анализ соотношения (18) показывает, что оно аналогично закону Ома для низкочастотных колебаний, в котором напряжение и ток связаны между собой через сопротивление цепи.

Для реальных диэлектриков (сред с потерями), когда величина абсолютной диэлектрической проницаемости определяется выражением

$$\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon'_a - i\varepsilon''_a = \varepsilon'_a (1 - j \operatorname{tg} \delta^{\circ}), \quad (19)$$

где  $\operatorname{tg} \delta^{\circ} = \frac{\varepsilon''_a}{\varepsilon'_a}$  - тангенс угла диэлектрических потерь,

волновое сопротивление становится комплексной величиной

$$Z_a = \frac{E}{\dot{H}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a (1 - j \operatorname{tg} \delta)}} \approx Z_0 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \exp(j \frac{\delta}{2}). \quad (20)$$

При распространении радиоволн неоднородности среды также могут наблюдаться. Примером данного явления служить прохождение радиоволн (электромагнитных волн определенного частотного диапазона) через тропосферу Земли. В ней неоднородностями для радиоволн могут служить капельные образования дождя, снега, града, тумана, а также пылевые образования, поднятые с поверхности Земли. Рассеяние сантиметровых радиоволн каплями дождя и тумана приводит к появлению отраженных сигналов, мешающих нормальной работе.

## Лекция 5. Дисперсия и групповая скорость

*Дисперсия. Нормальная и аномальная дисперсия. Групповая скорость. Сравнение фазовой и группой скоростей. Дисперсионные кривые. Пример дисперсионных соотношений для прямоугольного волновода*

### 1. Дисперсия. Нормальная и аномальная дисперсия

При распространении колебаний в веществе возникают следующие явления:

- рассеяние (дисперсия);
- поглощение (абсорбция).

При распространении немонохромных электромагнитных волн дисперсия может проявляться как

- частотная зависимость (зависимости диэлектрической  $\varepsilon(\omega)$ , магнитной  $\mu(\omega)$  проницаемостей, а также показателя преломления  $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}$  от частоты, а также удельной электрической проводимости  $\sigma(\omega)$ ),

- пространственная зависимость (за счет зависимости циклической частоты  $\omega$  от волнового числа  $k$  и параметров среды).

Проявляется при распространении только немонохромных электромагнитных волн. Физические причины, приводящие к дисперсии, могут быть различными, условиями возникновения дисперсии являются:

- наличие в среде внутренних процессов, время протекания которых соизмеримо с периодом изменения внешнего поля;
- размеры среды соизмеримы с длиной волны.

**Среды**, для которых характерна дисперсия, называются **диспергирующими**.

Необходимость изучения явления дисперсии обусловлено важностью практических приложений, где она наблюдается. К ним, в частности, можно отнести распространение радиоволн через ионосферу при организации космических каналов связи, создание приборов сверхвысоких частот (СВЧ), разработка метаматериалов, многослойных пленочных структур интегральной оптики, содержащих волноведущие и разделительные слои диэлектриков или полупроводников.

В видимом диапазоне длин волн (длина волны 380 нм – 740 нм) самыми простыми примерами дисперсии являются появление радуги или разложение света в спектр при прохождении через призму. Физики процесса поясняется на рисунках 1,а и 1,б соответственно.

Запишем соотношения, описывающие частотные свойства параметров ионосферы Земли при распространении в ней радиоволн, учитывая что  $\mu(\omega) = \mu_0$ :

- дисперсия относительной диэлектрической проницаемости (частотная зависимость):

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\tilde{\omega}_0^2}, \quad (1)$$

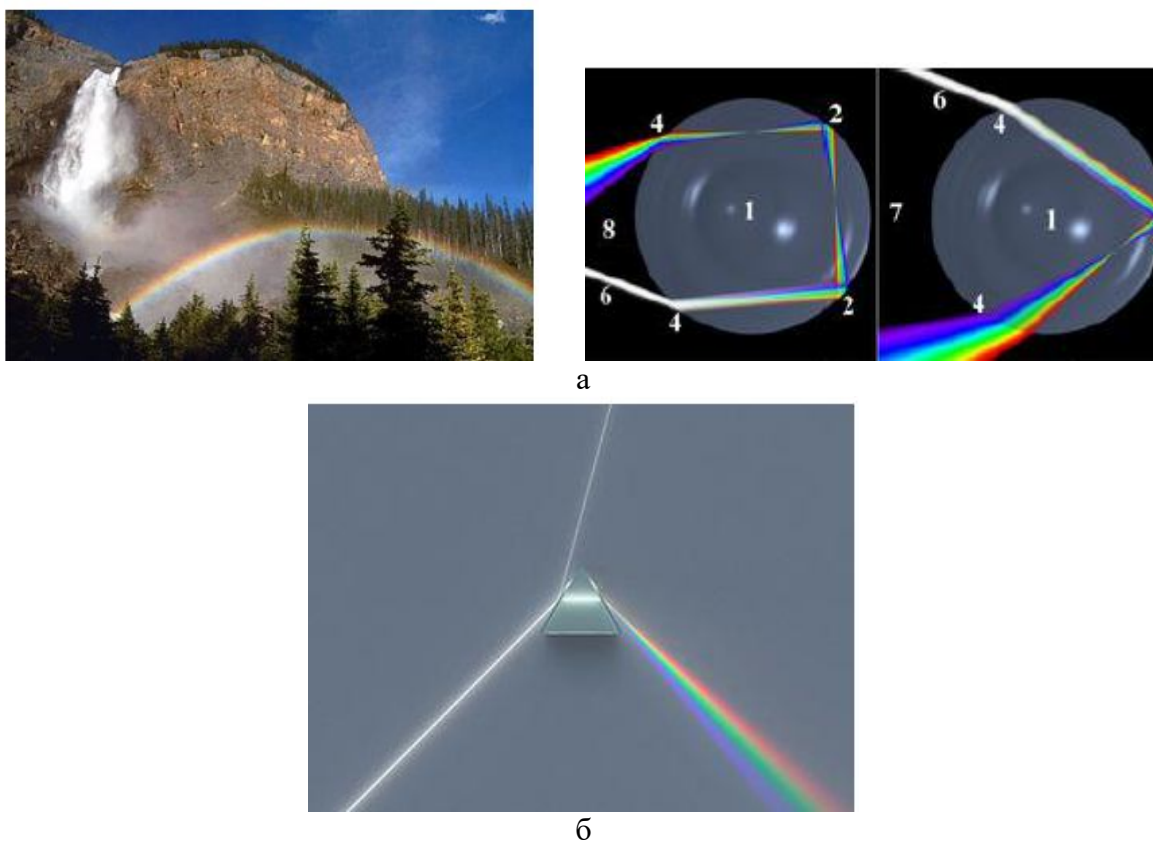


Рисунок 1 – Явление дисперсии в природе:

*а* – рассеяние света в водяных парах и процесс прохождения луча света в капле воды;  
*б* – разложение луча света в спектр в твердой призме

- дисперсия показателя преломления (частотная зависимость):

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{2} \left( \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1 \right)}, \quad (2)$$

- дисперсия показателя поглощения (частотная зависимость):

$$\chi(\omega) = \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{2} \left( \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} - 1 \right)}, \quad (3)$$

- дисперсионное соотношение для плазмы (пространственная зависимость):

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2, \quad (4)$$

где  $\omega_p$  - плазменная (ленгмюровская) частота;

$$\tilde{\omega}_0^2 = \omega_0^2 - \frac{\omega_p^2}{3};$$

$\omega_0$  - резонансная частота нормальных колебаний в молекуле;

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} - \text{тангенс угла диэлектрических потерь.}$$

Графические зависимости показателей преломления и поглощения приведены на рисунке 2, а дисперсионной зависимости для плазмы – на рисунке 3.

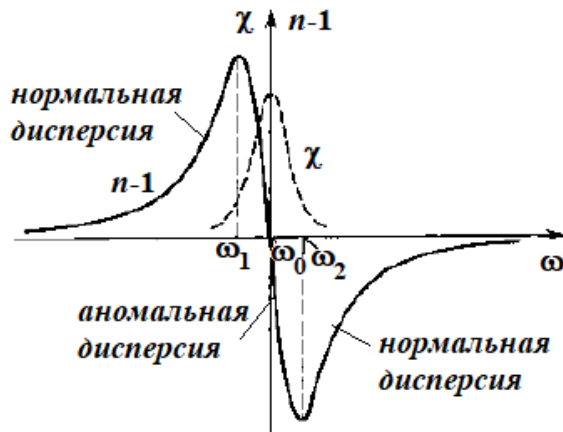


Рисунок 2 – Зависимость показателей преломления и поглощения от частоты

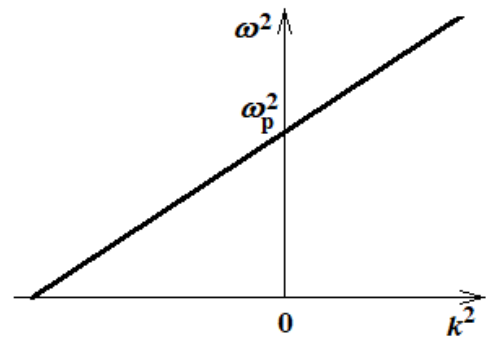


Рисунок 3 – Дисперсионная зависимость для плазмы

Анализ рисунка 3 показывает, что в диапазоне частот показатель преломления либо увеличивается с ростом частоты, либо уменьшается. Данные области получили соответственно названия *области нормальной дисперсии* и *области аномальной дисперсии*.

## 2. Групповая скорость

В отсутствии дисперсии фазовая скорость монохроматической волны не зависит от частоты. Однако на практике мы всегда имеем дело с группой волн, поскольку любая реальная волна отличается от идеальной синусоиды хотя бы тем, что синусоида не ограничивается в пространстве и времени. Введение ограничений приводит к тому, что синусоидальная волна будет уже представлять собой наложение большого количества синусоидальных волн. Суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте, называется *волновым пакетом* или *группой волн*.

На рисунке 4 показан пример волнового пакета, образованного из двух волн с мало отличающимися частотами, т.е.  $\Delta\omega \ll \omega_0$ . Там, где фазы совпадают, наблюдается усиление амплитуды, где нет – гашение (результат интерференции).

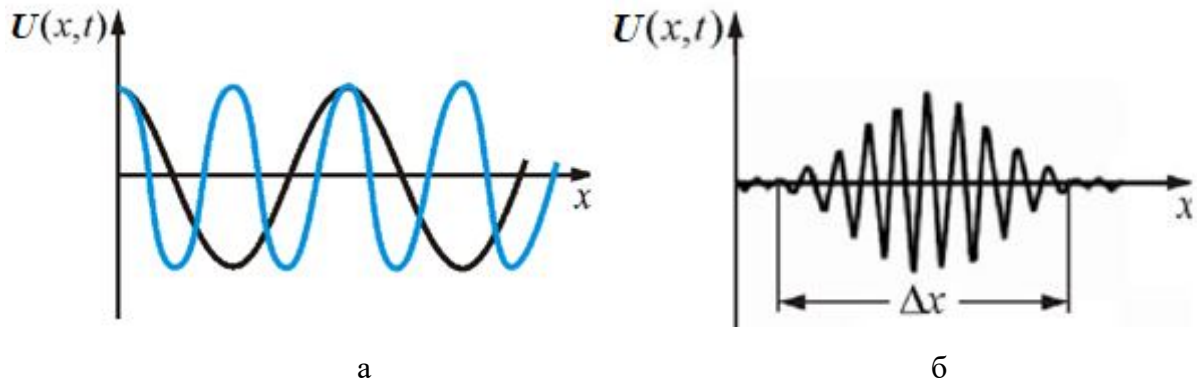


Рисунок 4 – Волновой пакет:  
а – группа из двух волн с мало отличающимися частотами; б – волновой пакет (суммарный)

Скорость распространения волнового пакета в среде, имеющей дисперсию, отличается от фазовой скорости слагаемых волн. Данная **скорость** получила название **групповой**  $v_g$ . Распространение волнового пакета будет при этом определяться перемещением не какой-либо фазы колебаний, а энергии колебаний, которую переносит испускаемая источником группа волн.

Получим выражение для пакета волн. Пусть волновой пакет образован двумя плоскими продольными косинусоидальными волнами, распространяющимися вдоль оси  $Ox$ . Пусть амплитуды этих волн одинаковы, а начальные фазы равны нулю, т.е.  $\varphi_{10} = \varphi_{20} = 0$ , а частоты и волновые числа несколько различны, но близки друг к другу:

$$\begin{aligned} U_1 &= A_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x), \\ U_2 &= A_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x). \end{aligned} \quad (5)$$

Для результирующей волны имеем

$$U = U_1 + U_2 = 2A_0 \cos(\Delta\omega t - \Delta k x) \cos(\omega t - kx), \quad (6)$$

где  $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ ,  $\Delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$ ,  $k = \frac{k_1 + k_2}{2}$ ,  $\Delta k = \frac{k_2 - k_1}{2}$ .

Анализ соотношения (6) показывает, что результирующая (суммарная) волна является плоской волной, циклическая частота  $\omega$  и волновое число  $k$  которой равны полусумме соответственно циклических частот и волновых числе синусоидальных волн, образующих пакет. Огибающая имеет частоту полуразности, т.е.  $\Delta\omega$ . Амплитуда этой волны не постоянна, а зависит от координаты  $x$  и времени  $t$ :

$$A = 2A_0 \cos(\Delta\omega t - \Delta kx), \quad (7)$$

где  $\Delta\omega t - \Delta kx = \varphi_A$  - фаза амплитуды распространяющейся волны.

Иллюстрация распределения возмущения для фазовой и групповой скорости показана на рисунке 5. Анализ данного рисунка показывает, что амплитуда суммарной волны изменяется значительно медленнее, чем амплитуда «заполняющей» волны.

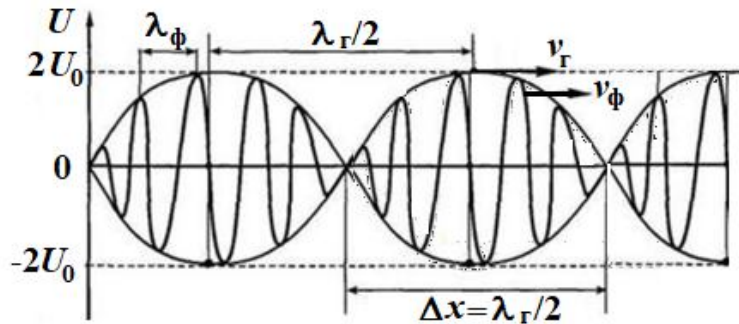


Рисунок 5 – Распределение амплитуды колебаний для пакета волн

Получим выражение для групповой скорости. Для этого продифференцируем выражение для  $\varphi_A$  в предположении, что  $\varphi_A = \text{const}$ . В результате получаем

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}.$$

В пределе, когда  $\Delta\omega$ , а, следовательно, и  $\Delta k$  стремятся к нулю, получаем

$$u = \frac{d\omega}{dk}.$$

Учитывая, что  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  и  $dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda$ , имеем

$$u = -\frac{\lambda^2}{2\pi} \frac{d\omega}{d\lambda}.$$

Поскольку  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\nu_\phi}{\lambda}$ , то

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = -\frac{2\pi\nu_\phi}{\lambda^2} + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d\nu_\phi}{d\lambda}, \quad (8a) \quad \nu_r = \nu_\phi - \lambda \frac{d\nu_\phi}{d\lambda}. \quad (8б)$$

Излучение всегда имеет некоторый спектральный интервал колебаний. Пакет таких волн с близкими частотами представляется волновой группой, которая имеет блуждающий максимум амплитуды.

### 3. Сравнение фазовой и групповой скоростей. Дисперсионные кривые

Для анализа структуры волнового поля используем соотношение (8б), описывающего нахождение групповой скорости. Он показывает, что в диспергирующей среде в зависимости от знака  $\frac{d\nu_\phi}{d\lambda}$  групповая скорость может быть больше или меньше фазовой. Для нормальной дисперсии  $\frac{d\nu_\phi}{d\lambda} > 0$  (более длинные волны распространяются быстрее более коротких). Если же наоборот, т.е.  $\frac{d\nu_\phi}{d\lambda} < 0$ , то среда обладает аномальной дисперсией на данных частотах. Если  $\frac{d\nu_\phi}{d\lambda} = 0$  и  $\nu_r = \nu_\phi$ , то среда не имеет дисперсии. **Волны**, скорости которых не зависят от частоты, называются **бездисперсионными**.

Дисперсионные кривые для перечисленных случаев показаны на рисунке 6.

Следует отметить, что групповая скорость имеет физический смысл, когда она является действительной величиной. Это возможно, если среда обладает малым поглощением. Если не учитывать это, то можно получить физически нереализуемый случай превышения групповой скоростью скорости

света в вакууме. **Групповая скорость** может быть **отрицательной**, т.е. направления волнового вектора и групповой скорости могут быть противоположными. В этом случае **волна** называется **обратной**.

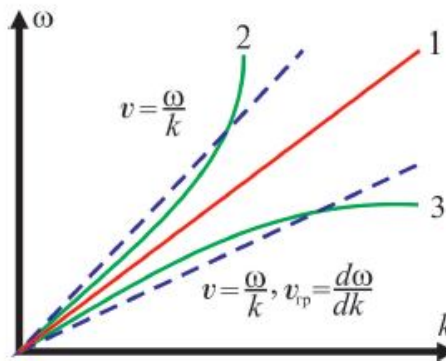


Рисунок 6 – Дисперсионные кривые  $\omega(k)$  :

1 – бездисперсионная мода ( $v_{гр} = v_{ф}$ );

2 – дисперсионная мода ( $\frac{dv_{ф}}{d\lambda} > 0$ ,  $v_{гр} < v_{ф}$ ), нормальная дисперсия;

3 – дисперсионная мода ( $\frac{dv_{ф}}{d\lambda} < 0$ ,  $v_{гр} > v_{ф}$ ), аномальная дисперсия

Выполним сравнение фазовой и групповой скоростей для электромагнитного поля. Как было показано ранее, групповая скорость соответствует скорости переноса энергии волны в среде. При этом она не может быть больше скорости света. Фазовая скорость может быть скорости света. Физическая причина этого заключается в следующем. Электромагнитная волна, распространяясь в среде, действует на заряды  $e$  (электроны) с возмущающей силой  $eE(t)$ . Если частота внешнего воздействия меньше резонансной частоты, то смещение заряда  $x(t)$  будет следовать за  $eE(t)$ . Заряд будет колебаться в среде с внешней силой. В свою очередь смещение заряда вызывает появление электрического поля, уменьшающего внешнее поле и, следовательно, уменьшение возвращающей силой. Это приводит к уменьшению фазовой скорости. Если  $\omega > \omega_0$ , то смещение заряда находится в противофазе с внешней силой  $eE(t)$ . Поле, образованное смещением заряда, усиливает внешнее поле  $E(t)$  и, следовательно, возвращающую силу. Это вызывает увеличение фазовой скорости, и она может стать больше скорости света. С учетом ска-

занного выше, можно записать взаимосвязь между фазовой и групповой скоростями для электромагнитных волн:

$$v_g v = c^2, \quad (8)$$

Подводя итогу, можно сформулировать **основные свойства групповой скорости**:

- групповая скорость – это скорость переноса энергии волны в среде;
- групповая скорость не может быть выше скорости света;
- групповая скорость может быть отрицательной;
- групповая скорость имеет физический смысл, когда она является действительной величиной;
- для электромагнитных волн произведение групповой скорости на фазовую скорость есть величина постоянная, равная скорости света в вакууме.

#### 4. Пример дисперсионных соотношений для прямоугольного волновода

Прямоугольный волновод представляет собой регулярную (вытянутую вдоль одной из координатных осей, в рассматриваемом случае – вдоль оси  $Oz$ ) закрытую металлическую конструкцию для передачи энергии в диапазоне СВЧ. Геометрия конструкции показана на рисунке 7.

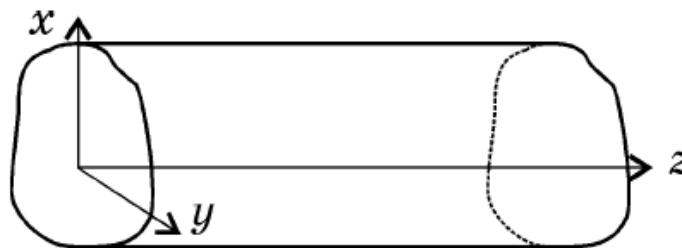


Рисунок 7 – Геометрия конструкции волновода

Из теории известно, что поля в волноводе представляются в виде суперпозиции падающих под углом к поверхности и отраженных волн, которые распространяются вдоль волновода и могут быть описаны волновым уравнениями:

$$F(x, y, z, t) = F^+(x, y) \exp(i(\omega t - Kz)) + F^-(x, y) \exp(i(\omega t + Kz)), \quad (9)$$

где волновое число в волноводе  $K \neq k$  отличается от волнового числа в свободном пространстве. Следовательно, фазовая скорость волны в волноводе  $v_\phi = \frac{\omega}{K}$  будет отличаться от скорости света  $c = \frac{\omega}{k}$ . Подобная ситуация может иметь место при наклонном падении плоской волны на отражающую поверхность (стенку волновода).

Функции  $F^\pm(x, y)$  характеризуют распределение поля поперечной плоскости волновода и играют роль амплитуды падающей и отраженной волн. Функции подобны и отличаются только постоянным множителем, поскольку они удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению. Для них можно записать волновое уравнение

$$\nabla_{x,y}^2 F^\pm(x, y) + (k^2 - K^2) F^\pm(x, y) = 0. \quad (10)$$

Для электромагнитных волн в волноводах можно записать следующие соотношения для определения фазовой скорости, длины волны и волнового числа:

$$v_\phi = c / \sqrt{1 - (f_{\text{кр}} / f)^2}, \quad (11a) \quad \Lambda = \lambda / \sqrt{1 - (f_{\text{кр}} / f)^2}, \quad (11б)$$

$$K = k \sqrt{1 - (f_{\text{кр}} / f)^2}. \quad (11в)$$

Соотношение (11a) показывает, что в волноводе фазовая скорость зависит от частоты и характеризует закон дисперсии для волновода. Данный закон проиллюстрирован на рисунке 8.

Важной особенностью зависимости (11a) является то, что в волноводе  $v_\phi > c$ . Кроме того, к особенностям относится и то, что действительные значения фазовой скорости, а значит, и нормальное распространение электромагнитных волн по волноводу возможно лишь для областей частот  $f > f_{\text{кр}}$ .

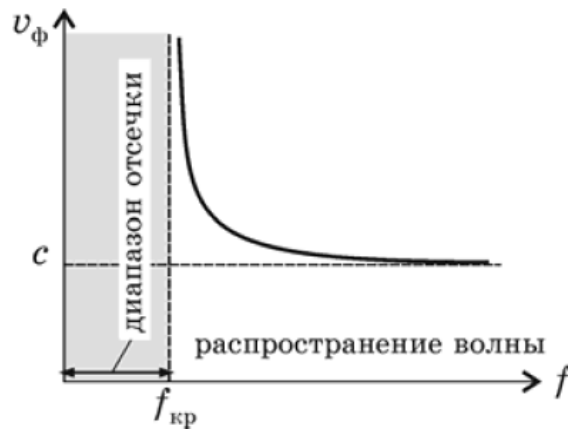


Рисунок 8 – Общий вид закона дисперсии электромагнитных волн в волноводах

Отсюда понятным становится физическое содержание обозначения  $f_{кр}$ : критическая частота – это предельная частота, которая разделяет диапазон нормального распространения электромагнитных полей в виде волн и так называемый диапазон отсечки  $f < f_{кр}$ . В режиме отсечки волновое число в волноводе становится мнимым, волновые множители принимают форму  $\exp(i\omega t)\exp(\pm|K|z)$ . Данная запись означает, что поля во всех точках волновода колеблются синфазно во времени, а амплитуда колебаний вдоль волновода уменьшается экспоненциально. Такое явление нельзя назвать поглощением, так как оно наблюдается в волноводах без потерь, а можно представить как некоторые краевые поля, которые существуют на некотором расстоянии от места возбуждения, но не способные возбудить электромагнитную волну, бегущую по волноводу.

Кроме рассмотренного явления дисперсия в волноводе возможна также за счет потерь в стенках волновода или заполняющем диэлектрике.

В волноводе существует большое количество волн. Однако анализировать их все нецелесообразно. В связи с этим вводится их классификация, и сравнительный анализ проводится уже для отдельных типов волн.

Классификация производится с использованием дисперсионных соотношений. В рассматриваемом случае им является выражение

$$k^2 - K^2. \quad (12)$$

Для пояснения этого запишем поперечные составляющие полей прямоугольного волновода:

$$\begin{aligned} E_x &= -i \frac{K \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial y}}{k^2 - K^2}, & H_y &= i \frac{\omega \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} + K \frac{\partial H_z}{\partial y}}{k^2 - K^2}, \\ E_y &= -i \frac{K \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega \mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial x}}{k^2 - K^2}, & H_x &= i \frac{\omega \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial y} + K \frac{\partial H_z}{\partial x}}{k^2 - K^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Анализ данных уравнений показывает, что они записаны относительно продольных компонент электрического и магнитного полей. Одновременно в волнах обе компоненты существовать не могут. В связи с этим выделяют две группы волн:  $TE$ - ( $E_z = 0$ ) и  $TM$ -волны ( $H_z = 0$ ). Для данных волн  $K \neq k$ . Волны являются дисперсионными. Если же одновременно  $E_z = 0$  и  $H_z = 0$ , то  $K \rightarrow k$ , волна становится бездисперсионной и называется  $TEM$ . В прямоугольном волноводе она распространяться не может. Данная волна распространяется в волноводах, которые допускают существование статистических полей, например, в коаксиальном волноводе, полосковой линии и т.п.

## **Лекция 6. Отражение и прохождение волны на границе раздела сред**

*Законы отражения и прохождения при нормальном падении волн на границу раздела сред. Наклонное падение продольной акустической волны на границу раздела жидких и газообразных сред. Наклонное падение акустической волны на границу раздела твердых тел. Эффект расщепления электромагнитной волны в гиротропных средах*

### **1. Законы отражения и прохождения при нормальном падении волн на границу раздела сред**

Если при распространении волны на ее пути встретилась граница со средой, имеющей другие параметры, то во вторую среду пройдет только часть мощности волны, остальная отразится от границы. При конструировании излучателей ультразвуковых волн или электромагнитных волн (антенн)

актуальным является хорошее согласование их со средой, чтобы максимальная энергия уходила в требуемом направлении.

Для записи соотношений, описывающих структуру поля вблизи границы раздела сред, рассмотрим частный случай падения акустической волны по нормали к границе. Геометрия задачи показана на рисунке 1.



Рисунок 1 – Геометрия задачи о падении волны на границу раздела сред

Среды определяются импедансами  $Z_1$  и  $Z_2$  соответственно, а также волновыми числами  $k_1$  и  $k_2$ .

Запишем поле в первой среде в виде суммы падающей и отраженной волн давлений и колебательных скоростей для некоторой фиксированной частоты (гармонического колебания):

$$p_{a1} = p_{a \text{ пад}} \exp(-ik_1 z) + p_{a \text{ отр}} \exp(ik_1 z), \quad (1)$$

$$v_{z1} = v_{z \text{ пад}} \exp(-ik_1 z) + v_{z \text{ отр}} \exp(ik_1 z), \quad (2)$$

где  $p_{a \text{ пад}}$ ,  $p_{a \text{ отр}}$  - амплитуды акустических давлений падающей и отраженной волн в сечении  $z = 0$ ;

$v_{z \text{ пад}}$ ,  $v_{z \text{ отр}}$  - амплитуды колебательных скоростей частиц среды, движущихся под воздействием этих волн в сечении  $z = 0$ .

Справа от границы раздела сред существует только прошедшая волна:

$$p_{a2} = p_{a \text{ пр}} \exp(-ik_2 z), \quad (3)$$

$$v_{z2} = v_{z \text{ пр}} \exp(-ik_2 z), \quad (4)$$

где  $p_{a \text{ пр}}$  - амплитуда акустического давления прошедшей волны в сечении  $z = 0$ ;

$v_{z \text{ пр}}$  - амплитуды колебательных скоростей частиц среды, движущихся под воздействием этих волн в сечении  $z = 0$ .

Акустическое давление и колебательная скорость частиц среды связаны между собой через акустическое сопротивление среды (импеданс):

$$Z_a = \pm \frac{P_a}{v}. \quad (5)$$

В соотношении (5) верхний знак выбирается для волны, бегущей вдоль оси  $z$  (падающая волна в первой среде и прошедшая во второй среде), а нижний – для волны, бегущей в противоположную сторону (отраженная волна на рисунке 1).

Введем **коэффициент отражения** от границы раздела в сечении  $z = 0$  как отношение амплитуд акустических давлений отраженной и падающей волн:

$$R_p = \frac{P_{a \text{ отр}}}{P_{a \text{ пад}}}, \quad (6)$$

где нижний индекс « $p$ » показывает, что коэффициент отражения вычисляется через амплитуды давлений.

Аналогично вводится **коэффициент прохождения по акустическому давлению**:

$$T_p = \frac{P_{a \text{ пр}}}{P_{a \text{ пад}}}. \quad (7)$$

Для нахождения численных значений коэффициентов отражения и прохождения необходимо учесть **граничные условия**, т.е. условия непрерывности акустического давления и нормальных к границе составляющих колебательной скорости частиц среды в сечении  $z = 0$ . Скачок давления на границе означал бы наличие дополнительного источника энергии волн, а скачок скорости соответствовал бы скачку смещения частиц, т.е. разрыву сплошного характера среды.

С учетом граничных условий

$$p_{a1} = p_{a2} \text{ и } v_{z1} = v_{z2}$$

для сечения  $z = 0$  получаем:

$$\begin{aligned} p_{a \text{ пад}} + p_{a \text{ отр}} &= p_{a \text{ пр}}, \\ v_{z1 \text{ пад}} + v_{z1 \text{ отр}} &= v_{z2 \text{ пр}}. \end{aligned} \quad (8a)$$

Второе соотношение можно преобразовать с учетом выражения (5):

$$\begin{aligned} p_{a \text{ пад}} + p_{a \text{ отр}} &= p_{a \text{ пр}}, \\ \frac{p_{a \text{ пад}}}{Z_1} - \frac{p_{a \text{ отр}}}{Z_1} &= \frac{p_{a \text{ пр}}}{Z_2}. \end{aligned} \quad (8b)$$

После несложных преобразований получаем систему уравнений, записанную относительно коэффициентов отражения и прохождения:

$$\begin{cases} 1 + R_p = T_p, \\ 1 - R_p = \frac{Z_1}{Z_2} T_p. \end{cases} \quad (9)$$

Откуда несложно получить:

$$R_p = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \quad (10a) \quad T_p = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} = 1 + R_p. \quad (10b)$$

Для колебательных скоростей коэффициенты отражения и прохождения имеют вид:

$$R_v = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_2 + Z_1} = -R_p, \quad (11a) \quad T_v = \frac{2Z_1}{Z_2 + Z_1} = 1 + R_v. \quad (11b)$$

Выражения (10) и (11) совпадают с выражениями для коэффициентов отражения и прохождения электромагнитных волн при нормальном падении волны на границу раздела сред.

**Коэффициент прохождения по интенсивности** определяется как отношение интенсивности прошедшей через границу плоской волны к интенсивности падающей. При нормальном падении имеем:

$$T_J = \frac{Z_1}{Z_2} \frac{p_{\text{пр}2}^2}{p_{\text{пад}1}^2} = \frac{Z_1}{Z_2} T_p^2 = \frac{Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} = 1 - |R_p|^2. \quad (12)$$

Параметр  $T_J$  показывает, какая доля мощности падающей волны просачивается во вторую среду.

Рассмотренные законы отражения и прохождения продольных волн при нормальном падении на границу раздела упругих сред (жидких, газообразных или твердых) справедливы и для сдвиговых волн в твердых средах.

## 2. Наклонное падение продольной акустической волны на границу раздела жидких и газообразных сред

Особенности отражения и прохождения акустической волны при наклонном падении на границу раздела упругих сред зависят от свойств сред и типа падающей волны. Для твердых сред продольная волна расщепляется, в связи с этим данный случай будет рассмотрен отдельно. Для акустических волн при падении на границу жидких и газообразных сред, а также электромагнитных волн независимо от свойств среды эффекта расщепления не наблюдается.

Рассмотрим случай наклонного падения продольной волны на границу жидких и газообразных сред. Комплексные амплитуды акустических давлений падающей, отраженной и преломленной волн будут определяться соотношениями:

$$p_{a \text{ пад}} = p_{a \text{ пад}} \exp(-ik_1(x \sin \theta + z \cos \theta)), \quad (13)$$

$$p_{a \text{ отр}} = p_{a \text{ отр}} \exp(-ik_1(x \sin \theta' - z \cos \theta')), \quad (14)$$

$$p_{a \text{ пр}} = p_{a \text{ пр}} \exp(-ik_2(x \sin \psi + z \cos \psi)). \quad (15)$$

Геометрия задачи показана на рисунке 2.

Граничные условия для данной задачи имеют вид:

$$p_{a \text{ пад}} \exp(-ik_1 x \sin \theta) + p_{a \text{ отр}} \exp(-ik_1 x \sin \theta') = p_{a \text{ пр}} \exp(-ik_2 x \sin \psi). \quad (16)$$

Тождество (16) должно выполняться для любых значений координаты  $z$ . Это возможно лишь в случае, когда все экспоненты равны друг другу. Следовательно, и показатели экспонент должны быть равны между собой:

$$k_1 \sin \theta = k_1 \sin \theta' = k_2 \sin \psi. \quad (17)$$

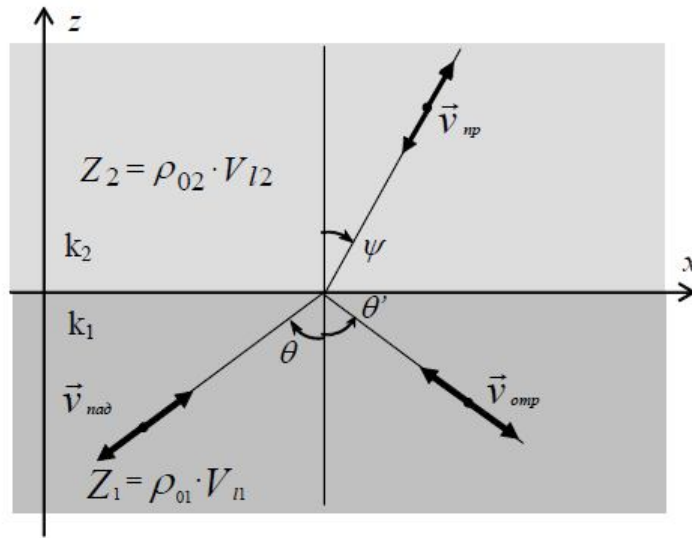


Рисунок 2 – Геометрия задачи наклонного падения продольной волны

Из соотношения получаются известные законы Снеллиуса:

- закон отражения – угол отражения равен углу падения:

$$\theta' = \theta, \quad (18a)$$

- закон преломления (закон синусов):

$$\sin \psi = \frac{k_1}{k_2} \sin \theta = \frac{V_{\ell 1}}{V_{\ell 2}} \sin \theta. \quad (18b)$$

С учетом равенства экспонент в (16) условие непрерывности акустических давлений на границе раздела сред можно записать в виде:

$$P_{a \text{ пад}} + P_{a \text{ отр}} = P_{a \text{ пр}}. \quad (19)$$

Запишем выражения, описывающие коэффициенты отражения и прохождения по акустическому давлению (**акустические формулы Френеля**):

$$R_p = \frac{Z_2 \cos \theta - Z_1 \cos \psi}{Z_2 \cos \theta + Z_1 \cos \psi}, \quad (20a) \quad T_p = \frac{2Z_2 \cos \theta}{Z_2 \cos \theta + Z_1 \cos \psi}. \quad (20b)$$

Анализ формулы (20a) показывает, что в случае, когда числитель обращается в нуль, волна проходит во вторую среду. Угол падения при **полной прозрачности** определяется из условия:

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{m^2 - 1}}, \quad (21)$$

$$\text{где } n = \frac{V_{\ell 1}}{V_{\ell 2}}; \quad m = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

В силу естественного ограничения ( $\psi \leq \pi / 2$ ) несложно вычислить **критический угол**, т.е. угол, при котором волна пойдет вдоль границы раздела:

$$\theta_{\text{кр}} = \arcsin \frac{V_{\ell 1}}{V_{\ell 2}}. \quad (22)$$

При  $\theta = \theta_{\text{кр}}$  угол преломления равен  $\psi = \pi / 2$ , коэффициент отражения  $R_p = 1$  во вторую среду ничего не проходит. Наблюдается **явление полного отражения**. При углах  $\theta > \theta_{\text{кр}}$   $\sin \psi > 1$  и тогда  $\cos \psi = -j\sqrt{\sin^2 \psi - 1}$  становится мнимой величиной. Коэффициент отражения Френеля при этом будет определяться соотношением:

$$R_p = \frac{\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{k_2 \cos \psi}{k_1 \cos \theta}}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{k_2 \cos \psi}{k_1 \cos \theta}} = -1 \exp(j\sigma), \quad (23)$$

где  $\operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} = \frac{jk_2 \cos \psi}{k_1 \cos \theta} \frac{\rho_2}{\rho_1}$ .

Анализ соотношения (23) показывает, что для данного случая коэффициент отражения по модулю равен единице, будет изменяться только величина фазы коэффициенты отражения.

### 3. Наклонное падение акустической волны на границу раздела твердых тел

На поверхности раздела твердых сред при падении продольной ( $L$ -) волны наблюдается расщепление (трансформация) падающей волны – появляется сдвиговая ( $T$ -, поперечная) волна. Расщепление связано с изменением характера, направления и параметров движения частиц на поверхности тела под действием падающей волны. Геометрия задачи показана на рисунке 3. Направление колебания частиц среды условно показаны стрелками.

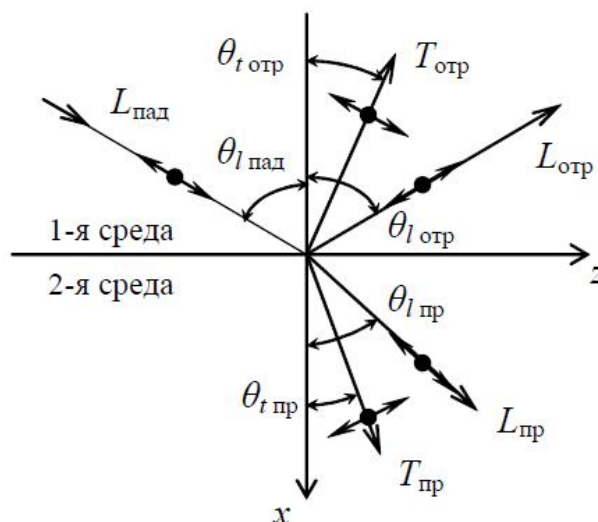


Рисунок 3 – Эффект расщепления продольной волны на продольную и сдвиговую при наклонном падении на границу раздела твердых тел

Для дальнейшего анализа введем понятие поляризации для сдвиговых волн. **Плоскость падения** задается вектором направления распространения волны и нормалью к границе раздела сред. Будем считать, что волна ***T поляризована вертикально***, если вектор смещения в этой волне лежит в плоскости падения, как показано на рисунке 3. Если колебания частиц среды происходят в плоскости, перпендикулярной плоскости падения, то волна считается ***поляризованной горизонтально***.

Скорости распространения продольных и сдвиговых волн различны (сдвиговые волны медленнее продольных). В связи с этим направления распространения сдвиговых волн отстоят от нормали к границе раздела на меньший угол, чем направления продольных волн. Сдвиговые волны  $T_{отр}$  и  $T_{пр}$  поляризованы вертикально.

При наклонном падении законы Снеллиуса примут вид:

$$\frac{\sin \theta_{\ell_{пад}}}{V_{\ell_{пад}}} = \frac{\sin \theta_{\ell_{отр}}}{V_{\ell_{отр}}} = \frac{\sin \theta_{\ell_{отр}}}{V_{\ell_{отр}}} = \frac{\sin \theta_{\ell_{пр}}}{V_{\ell_{пр}}} = \frac{\sin \theta_{\ell_{пр}}}{V_{\ell_{пр}}}. \quad (24)$$

Анализ соотношения (24) показывает, что направление распространения отраженных и прошедших волн зависит от скорости продольных и сдвиговых волн в средах, а, следовательно, от параметров упругости и плотности этих сред.

Если на границу раздела падает сдвиговая волна, поляризованная в плоскости падения (вертикальная поляризация), то и в этом случае наблюдается эффект расщепления волн на сдвиговую и продольную волну, как показано на рисунке 4.

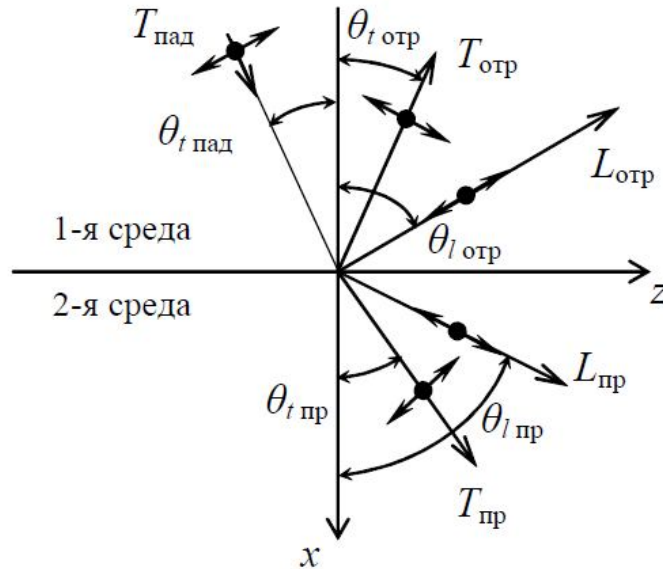


Рисунок 4 – Эффект расщепления сдвиговой волны вертикальной поляризации на сдвиговую и продольную при наклонном падении на границу раздела твердых тел

Закон Снеллиуса при этом будет иметь вид

$$\frac{\sin \theta_{\text{пад}}}{V_{\text{пад}}} = \frac{\sin \theta_{\text{отр}}}{V_{\text{отр}}} = \frac{\sin \theta_{\ell \text{отр}}}{V_{\ell \text{отр}}} = \frac{\sin \theta_{\text{пр}}}{V_{\text{пр}}} = \frac{\sin \theta_{\ell \text{пр}}}{V_{\ell \text{пр}}}. \quad (25)$$

Из анализа данного соотношения следует, что расщепление лучей в первой среде наблюдается до момента, когда продольная волна начинает скользить вдоль границы раздела  $\theta_{\ell \text{отр}} = \frac{\pi}{2}$ . При дальнейшем увеличении угла падения в первой среде остается лишь одна сдвиговая волна.

Если на границу раздела двух твердых сред падает сдвиговая волна, поляризованная горизонтально, как показано на рисунке 5, то в связи с тем, что частицы первой среды совершают колебания перпендикулярно к плоскости падения, то отсутствует составляющая сил в направлении распространения падающей волны.

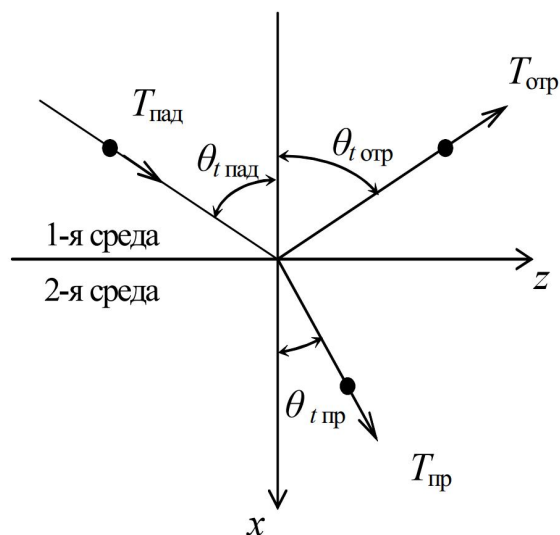


Рисунок 5 – Падение сдвиговой волны горизонтальной поляризации на границу раздела твердых сред

В этом случае эффект расщепления лучей не наблюдается. Отраженный и прошедший лучи формируются сдвиговыми волнами, поляризованными горизонтально. Ориентация лучей в этом случае может быть определена из соотношения:

$$\frac{\sin \theta_{t \text{ пад}}}{V_{t \text{ пад}}} = \frac{\sin \theta_{t \text{ отр}}}{V_{t \text{ отр}}} = \frac{\sin \theta_{t \text{ пр}}}{V_{t \text{ пр}}}. \quad (26)$$

Следует отметить, что если одна из сред не поддерживает распространение сдвиговых волн (например, граница твердого тела и жидкости), то в ней остается лишь продольная волна. В то же время в твердом теле эффект расщепления наблюдаться будет. В случае падения сдвиговой волны горизонтальной поляризации из твердого тела на границу с жидкостью в твердом теле наблюдается отраженная сдвиговая волна горизонтальной поляризации, в то время как прошедшей волны в жидкость вообще не будет.

#### 4. Эффект расщепления электромагнитной волны в гиротропных средах

Следует отметить, что эффект расщепления волн может наблюдаться и для электромагнитных волн. Однако данный эффект характерен только для случая падения плоской волны на границу раздела с гиротропной средой, т.е.

средой, обладающей или магнитной или диэлектрической и киральной (и магнитной и диэлектрической) анизотропией. Расщепление будет наблюдаться только в анизотропной среде, подвергшейся подмагничиванию.

Векторный характер полей (распространяющейся электромагнитной волны и магнитного поля, определяющего гиротропные свойства среды) обуславливает наличие двух вариантов расщепления падающей плоской поперечной волны линейной поляризации:

- на две волны круговой поляризации с противоположным направлением вращения (как показано на рисунке 6) – при параллельной ориентации векторов распространяющейся электромагнитной волны и поля подмагничивания;

- на выделение в поперечной падающей волне, называемой обыкновенной), волны с продольной составляющей, называемой необыкновенной волной, для случая, когда векторы распространения электромагнитной волны и поля подмагничивания взаимной ортогональны.

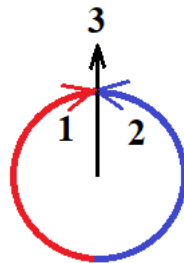


Рисунок 6 – Расщепление волны линейной поляризации на две волны круговой поляризации с различным направлением вращения:

1 – с левым направлением вращения; 2 – с правым направлением вращения;  
3 – исходная волна линейной поляризации

В обоих случаях фазовые скорости расщепленных волн отличаются друг от друга. Так, для среды с магнитной анизотропией фазовые скорости будут определяться соотношениями:

$$v_{\phi 1,2} = \frac{\omega}{k_{1,2}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu_{1,2}}}, \quad (27)$$

Соотношение, определяющее величину относительной магнитной проницаемости, зависит от ориентации векторов распространяющейся электромагнитной волны и поля подмагничивания:

- для параллельной ориентации векторов:

$$\mu_{1,2} = \mu_0 \left( 1 + \frac{\omega_0}{\omega_m \pm \omega} \right), \quad (28)$$

- для перпендикулярной ориентации

$$\mu_{\perp} = \frac{\mu_x^2 - a^2}{\mu_x}, \quad (29)$$

где  $\omega$  - циклическая частота распространяющейся электромагнитной волны;

$\omega_0$  - частота, связанная с магнитной восприимчивостью среды  $\chi^M$ , т.е. откликом среды на прилагаемое внешнее магнитное поле  $\vec{H}_=$ :

$$\omega_0 = |\gamma| \mu_0 \chi^M H_+ = |\gamma| \mu_0 (\mu - 1) H_+, \quad (30)$$

$\gamma = -2.21 \cdot 10^5$  Гц/(А•м) – гиромагнитное отношение;

$\omega_m$  - частота гиромагнитного резонанса, определяемого выражением:

$$\omega_m = |\gamma| H_+. \quad (31)$$

$$a = \mu_0 \frac{\omega_m \omega_0}{\omega^2 - \omega_m^2}. \quad (32)$$

Вследствие различия фазовых скоростей волны во второй среде характеризуются различными углами прохождения, а, следовательно, и преломленными путями. Сказанное выше для случая поперечного подмагничивания иллюстрируется рисунком 6.

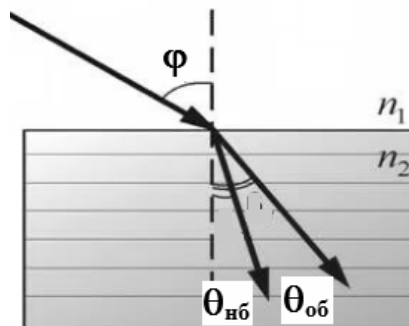


Рисунок 6 – Иллюстрация эффекта двойного лучепреломления в подмагниченных анизотропных средах

Сравнение случаев расщепления падающей электромагнитной волны с акустической волной показывает, что

- для поперечной электромагнитной волны расщепление наблюдается только во второй среде. Для акустической волны расщепление осуществляется на границе раздела среда, вследствие чего неосновная волна существует в обеих средах;

- для электромагнитной волны в отличие от акустической может наблюдаться вариант изменения поляризации прошедшей волны;

- процесс расщепления электромагнитной волны наблюдается в анизотропных средах (как твердых, так и газообразных) под воздействием поля подмагничивания, т.е. является управляемым.

## **Лекция 7. Поверхностные волны на границе раздела сред**

*Поверхностные акустические волны. Применение поверхностных акустических волн. Поверхностные электромагнитные волны на границе раздела сред*

### **1. Поверхностные акустические волны**

Поверхностные акустические волны (ПАВ) широко используются в радиотехнике для создания таких устройств, как линии задержки и фильтры.

Поверхностные волны отличаются от пространственных (продольных, сдвиговых) тем, что вся их энергия сосредоточена вблизи границы раздела материалов с различными свойствами. Теория поверхностных волн впервые была предложена английским физиком Дж. Рэлеем в 1885 г. Он теоретически предсказал и доказал возможность распространения в тонком поверхностном слое твердого тела, граничащего с воздухом, поверхностных акустических волн, которые принято также называть *релеевскими волнами (R-волнами)*. Образование поверхностной волны Рэлея на границе твердого тела с вакуумом показано на рисунке 1.

При нахождении компонент *R*-волн будем полагать, что плоская граница вакуум – изотропная твердая среда совпадает с плоскостью  $xOy$ , как показано на рисунке 1, а ось  $Oz$  направлена вглубь твердой среды.

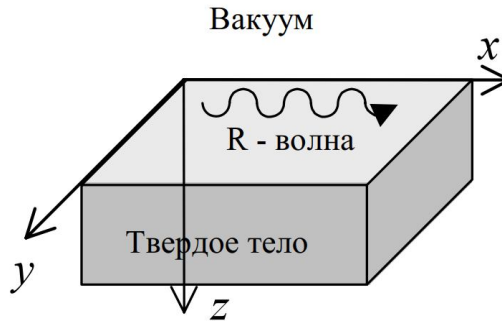


Рисунок 1 – Образование  $R$ -волны на границе раздела твердого тела и вакуума

Рэлеевская волна представляет собой сложную акустическую волну, образованную совокупностью продольных и сдвиговых компонентов вектора смещения. В связи с этим волновые уравнения для вектора смещения частиц твердого тела будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{u}_\ell + k_\ell^2 \vec{u}_\ell &= 0, \\ \nabla^2 \vec{u}_t + k_t^2 \vec{u}_t &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

На границе раздела сред выполняется условие:

$$T_{iz} = 0 \quad (i = x, y, z). \quad (2)$$

Решение ищется в виде плоских гармонических волн, бегущих вдоль оси  $x$  в твердом полупространстве. С учетом того, что энергия поверхностной волны сосредоточена вблизи границы твердого тела с вакуумом, амплитуда смещения частиц среды, возмущенной этой волной, должна экспоненциально убывать с ростом координаты  $z$ . В результате можно записать:

$$\dot{u}_x = A \left( \exp(-qz) + \frac{2qs}{(k_R^2 + s^2)} \exp(-sz) \right) \exp(j(\omega t - k_R x)), \quad (3)$$

$$\dot{u}_z = -A \frac{jq}{k_R} \left( \exp(-qz) - \frac{2k_R^2}{(k_R^2 + s^2)} \exp(-sz) \right) \exp(j(\omega t - k_R x)), \quad (4)$$

$$\dot{u}_y = 0, \quad (5)$$

где  $q = \sqrt{k_R^2 - k_\ell^2}, \quad (6a) \quad s = \sqrt{k_R^2 - k_t^2}, \quad (6b)$

$$k_\ell = \frac{\omega}{V_\ell}, \quad (7a) \quad k_t = \frac{\omega}{V_t}, \quad (7b) \quad k_R = \frac{\omega}{V_R}, \quad (7b)$$

$V_\ell$ ,  $V_t$ ,  $V_R$  - скорости распространения соответственно продольной, сдвиговой и релеевской волн в рассматриваемой среде.

Анализ соотношений (3)-(5) показывает, что амплитуды смещений частиц убывают при удалении точки наблюдения от границы раздела сред внутрь твердого тела по экспоненциальному закону, как показано на рисунке 2. Толщина локализации  $R$ -волны составляет 1..2 длины волны  $\lambda_R$ . На глубине  $\lambda_R$  плотность энергии в волне составляет примерно 5 % плотности у поверхности.

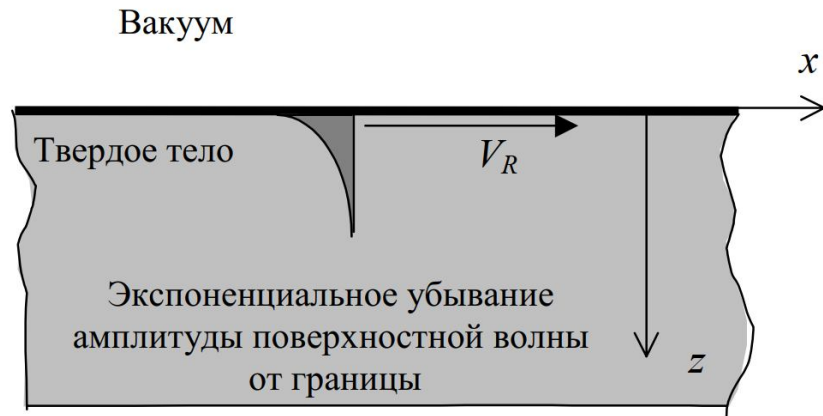


Рисунок 2 – Зависимость амплитуды поверхностной волны вблизи границы раздела сред

Вследствие сдвига фазы колебаний нормальной компоненты смещения  $\dot{u}_z$  относительно продольной составляющей  $\dot{u}_x$  на четверть периода (наличие множителя  $j$  (мнимой единицы) у компоненты  $\dot{u}_z$  в формуле (4), движение частиц среды происходит по эллиптической траектории. Большая ось перпендикулярна поверхности твердого тела, а малая – параллельна направлению распространения волны.

Скорость распространения поверхностной  $R$ -волны находится из решения дисперсионного уравнения:

$$\left(\frac{V_R}{V_t}\right)^6 - 8\left(\frac{V_R}{V_t}\right)^4 + 8\left[3 - 2\left(\frac{V_t}{V_\ell}\right)^2\right]\left(\frac{V_R}{V_t}\right)^2 - 16\left(1 - \frac{V_t}{V_\ell}\right)^2 = 0. \quad (8)$$

Данное уравнение имеет действительный корень (**корень Рэлея**), который приближенно можно представить в виде:

$$\left( \frac{V_R}{V_t} \right) \approx \frac{0,875 + 1,125\sigma}{1 + \sigma}, \quad (9)$$

где  $\sigma$  - коэффициент Пуассона.

При изменении коэффициента Пуассона в интервале  $\sigma \approx 0,05 \dots 0,5$  фазовая скорость поверхностной волны Рэлея  $V_R$  изменяется от  $0,917 V_t$  до  $0,958 V_t$ . Скорость  $V_R$  зависит только от упругих свойств твердого тела и не зависит от частоты, т.е. ***R-волна не обладает дисперсией***. Скорость поверхностной волны существенно меньше скорости продольной волны и немного меньше скорости сдвиговой волны. Поскольку скорость R-волны близка к скорости поперечной волны и большая часть ее упругой энергии в среде связана с компонентами поперечной, а не продольной волны, волна Рэлея во многих отношениях аналогична поперечной волне. Так, если шероховатость поверхности или воздушная нагрузка не оказывают преобладающего воздействия, то затухание волны Рэлея в большинстве материалов того же порядка, что и затухание сдвиговой волны.

Широту применения поверхностных акустических волн в радиотехнике обусловили их малое затухание, небольшая скорость распространения, отсутствие зависимости постоянной распространения от частоты и простота их возбуждения в широком частотном диапазоне.

Кроме R-волн существует целый ряд других типов ПАВ:

- поверхностны волны в твердом слое, лежащем на твердом упругом полупространстве (волны Лява);
- волны в пластинках (волны Лэмба);
- волны в искривленных твердых поверхностях;
- клиновые волны и т.д.

## 2. Применение поверхностных акустических волн

Для возбуждения и приема поверхностных акустических волн используются встречно-стержневые преобразователи. Конструкция данного устройства показана на рисунке 3.

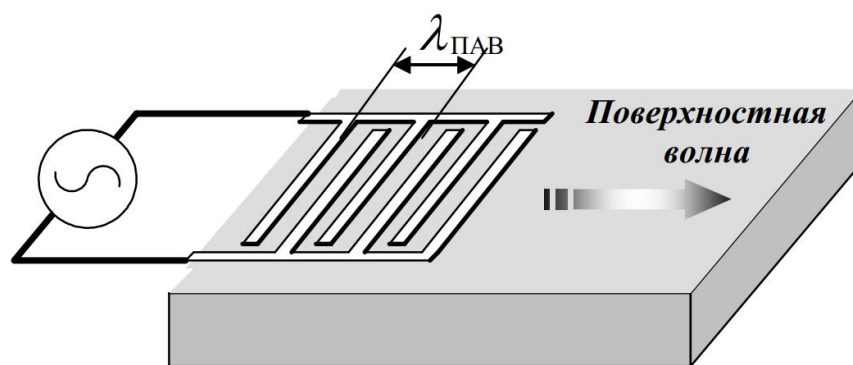


Рисунок 3 – Конструкции встречно-стержневого преобразователя

Принцип действия преобразователя заключается в следующем. Два проводника образуют плоский конденсатор на пластинке пьезоэлектрического материала. Под действием источника сигнала между проводниками конденсатора возникает переменное электрическое поле, воздействующее на пьезоэлектрическую подложку. Тем самым создается переменная деформация материала между металлическими электродами. Для повышения эффективности работы используются гребенчатые структуры электродов. Устройства являются взаимными, поскольку аналогично реализуются преобразователи акустической поверхностной волны в электрическую энергию.

Пространственный шаг штырей (расстояние между соседними одноименными штырями) равен длине волны  $S = \lambda_{\text{ПАВ}}$ . Обычно ширина штырей равна зазору  $\Delta$  между ними. Если зазор  $\Delta$  взять минимально реализуемого размера, например,  $\Delta_{\text{min}} = 0,5$  мкм, то получим максимально реализуемую частоту в зависимости от материала подложки  $f_{\text{max}} = 0,75 - 1,5$  ГГц. Допустимая площадь преобразователя ограничивает рабочую частоту снизу  $f_{\text{max}} = 1 - 10$  МГц. В преобразователе возбуждаются две волны, направленные в противоположные стороны. Часто полезной является одна волна, распространяющаяся к выходному преобразователю. Другая волна устраняется с помощью поглощающего покрытия.

При пространственном шаге структуры  $S = \lambda_{\text{ПАВ}}$  каждая пара электродов возбуждает акустическую волну. При этом волна проходит расстояние между парами за время, равное периоду повторения возбуждающего сигнала,

и волна усиливается. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) такого преобразователя имеет максимум на частоте

$$f_0 = \frac{V_{\text{ПАВ}}}{\lambda_{\text{ПАВ}}} = \frac{V_{\text{ПАВ}}}{S}. \quad (10)$$

Полоса пропускания  $\Delta f$  (на уровне 0.7 от максимума АЧХ) может быть вычислена по формуле:

$$\Delta f \approx \frac{2f_0}{N}, \quad (11)$$

где  $N$  - число пар стержней.

Преобразователь представляет собой частотно-избирательный элемент. Чем больше  $N$ , тем уже полоса, тем выше избирательность. Короткий преобразователь может быть использован для возбуждения (или приема) сигнала в более широком частотном диапазоне. Для формирования направленного излучения поверхностной волны вдоль периодической структуры длина стержней (область их взаимного перекрытия) должна составлять не менее нескольких длин поверхностной волны.

Радиоэлектронные устройства, использующие рассмотренные выше преобразователи с поверхностными акустическими волнами, называют ПАВ преобразователями. Два подобных преобразователя, расположенные на некотором расстоянии друг от друга, позволяют реализовать *линию задержки*, которая будет эффективно работать на частотах до 1 ГГц. При этом максимальное время задержки сигнала достигает 1 мс.

Устройства на акустических волнах находят широкое применение в приборах неразрушающего контроля структуры материалов, например, в дефектоскопах, а также в устройствах акустической интроскопии (системах ультразвукового исследования – УЗИ) в медицине. Кроме того, они часто используются в высококачественных микрофонах и акустических системах звукового диапазона.

### 3. Поверхностные электромагнитные волны на границе раздела сред

Поверхностные электромагнитные волны могут существовать не на всяких поверхностях, а только на границе раздела сред, одна из которых должны являться оптически активной, т.е. когда диэлектрическая или магнитная проницаемость которой отрицательна. Напомним, это возможно, если среда реализована с использованием метаматериалов. Поле поверхностной волны локализуется в приповерхностном слое, размеры которого обычно порядка длины волны, и экспоненциально затухает по обе стороны от нее. Схематичное изображение поверхностной волны, распространяющейся вдоль оси  $Ox$  на плоской границе раздела сред 1 и 2, когда  $E$ -составляющая поля лежит в плоскости  $z$  ( $E$ -поляризация) показана на рисунке 4.

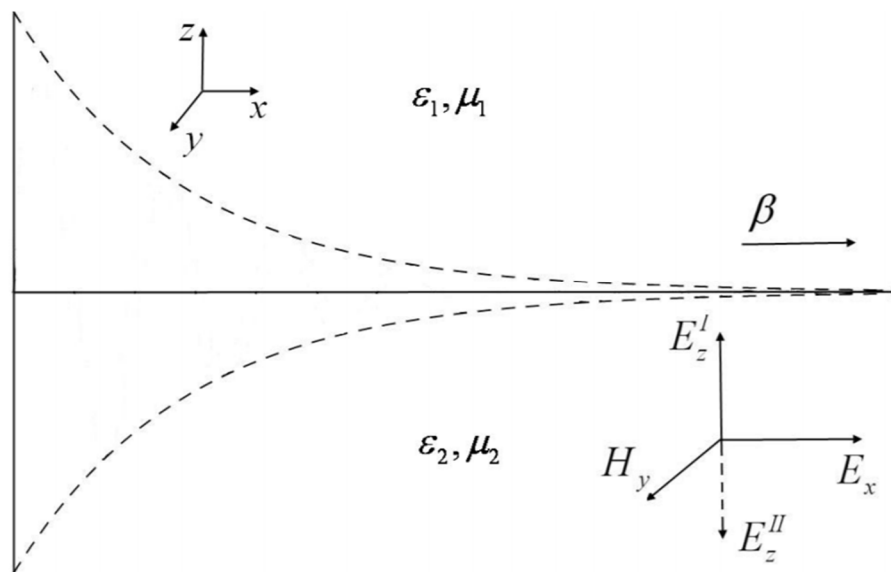


Рисунок 4 – Ориентация векторов электрического и магнитного полей в поверхностной волне

Поверхностные электромагнитные волны представляют практический интерес, поскольку их энергия убывает обратно пропорционально расстоянию от точечного источника, а энергия объемной электромагнитной волны – квадрату расстояния от источника. Данное обстоятельство на практике может существенным образом увеличить дальность действия радиолокационной

станции и систем связи, а также повысить эффективность за счет того, что волна «привязана» к поверхности и следует за ее кривизной.

Рассмотрим распространение поверхностной волны на примере плоской структуры «металл - диэлектрик». Будем полагать, что диэлектрическая проницаемость слоя диэлектрика не изменяется, т.е.  $\epsilon_d = \text{const}$ , а металла имеет частотную зависимость, определяемую соотношением:

$$\epsilon_m = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (12)$$

где  $\omega_p$  - плазменная частота.

В такой системе поверхностная волна имеет только одну поляризацию – *TM* (волна электрического типа).

Введем декартову систему координат таким образом, что ось *Z* была ориентирована перпендикулярно границе раздела сред, а ось *X* – вдоль направления распространения волны. С учетом гармонической зависимости полей от времени запишем компоненты волнового поля поверхностной волны:

$$\frac{d^2 H_y}{dz^2} - q_j^2 H_y = 0, \quad E_x = \frac{i}{k_0 \epsilon_j} \frac{dH_y}{dz}, \quad E_z = -\frac{\beta}{k_0 \epsilon_j} H_y. \quad (13)$$

Поперечные компоненты волнового вектора имеют вид:

$$q_j^2 = \beta^2 - k_0^2 \epsilon_j, \quad (14)$$

где  $\beta$  - продольное волновое число.

Решение волнового уравнения (13) для компоненты магнитного поля  $H_y$  с учетом ее непрерывности на границе раздела сред представим в виде:

$$H_y(x, z) = H_0 \exp(-i\beta x) \begin{cases} \exp(-q_d z), & z > 0, \\ \exp(q_m z), & z < 0. \end{cases} \quad (15)$$

Граничное условие для волны рассматриваемого типа, состоящее в непрерывности тангенциальной компоненты электрического типа на границе раздела  $E_x^{(1)} = E_x^{(2)}$ , приводит к уравнению, связывающему между собой ди-

электрические проницаемости граничащих сред и поперечные компоненты магнитного поля:

$$\frac{1}{\varepsilon_d} \frac{\partial H_y^{(1)}}{\partial z} - \frac{1}{\varepsilon_m} \frac{\partial H_y^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0. \quad (16)$$

Уравнение (16) с учетом (15) приводит к дисперсионному соотношению, связывающему константу распространения поверхностной волны с материальными параметрами граничащих сред и частотой:

$$\frac{q_d}{\varepsilon_d} + \frac{q_m}{\varepsilon_m} = 0, \quad \beta = k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_d \varepsilon_m}{\varepsilon_d + \varepsilon_m}}. \quad (17)$$

Для существования поверхностной волны необходимо, чтобы вещественные части диэлектрических проницаемостей имели разные знаки, поперечные компоненты волнового вектора имели вещественные значения и  $q_j > 0$ . На рисунке 5 приведена частотная зависимость константы распространения.

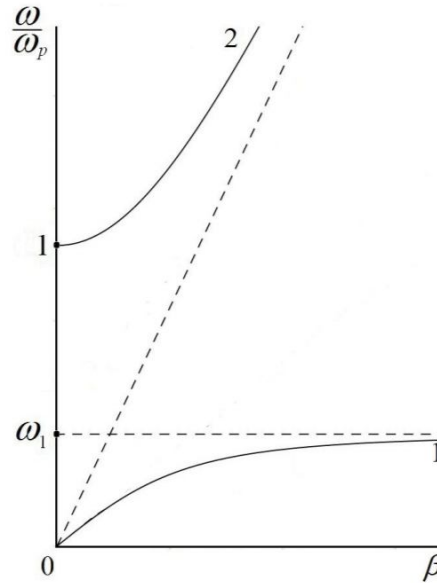


Рисунок 5 – Закон дисперсии поверхностной волны на границе раздела сред «металл – диэлектрик»

Анализ рисунка 5 показывает, что ветвь 2 отвечает объемным волнам и асимптотически стремится в фотонной прямой (линии света в диэлектрике)

$\beta = k_0 \sqrt{\varepsilon_d}$ . Ветвь 1 стремится к значению частоты  $\omega_1 = \frac{\omega_p}{\sqrt{\varepsilon_d + 1}}$  и отвечает по-

верхностной волне. При этом поверхностная волна обладает рядом важных свойств:

- она может существовать в области тех частот, где одна из диэлектрических проницаемостей приобретает отрицательные значения;
- она локализуется в приповерхностном слое раздела сред, поскольку  $\beta > k_0 \sqrt{\epsilon_d}$  и  $z$ -компоненты волнового вектора являются чисто мнимыми величинами. В результате чего поля экспоненциально затухают вдали от границы раздела сред.

Для возбуждения поверхностной волны на гладкой поверхности разработаны два эффективных метода: решеточный; призмный.

**Призмный метод** или **метод нарушенного полного внутреннего отражения** показан схематически на рисунке 6.

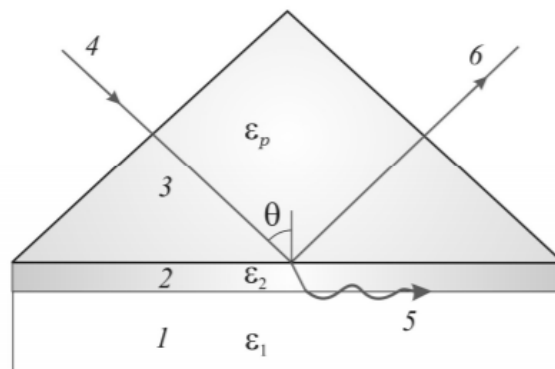


Рисунок 6 – Схема работы призмного метода:

- 1 – диэлектрик с  $\epsilon_1 = \text{const}$  ; 2 – поверхностно активная среда с  $\epsilon_2 = f(\omega)$  ;  
3 – призма с  $\epsilon_p$  ; 4 – падающая волна; 5 – поверхностная волна; 6 - отраженная волна

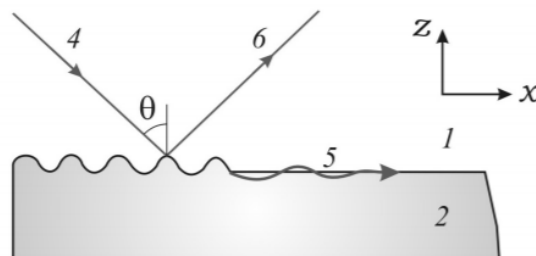


Рисунок 7 – Схема возбуждения поверхностной волны с помощью дифракционной решетки:

- 1 - диэлектрик с  $\epsilon_1 = \text{const}$  ; 2 – поверхностно активная среда с  $\epsilon_2 = f(\omega)$  ;  
4 – падающая волна; 5 – поверхностная волна; 6 - отраженная волна

Схема возбуждения поверхностной волны с помощью дифракционной решетки показана на рисунке 7.

В большинстве случаев решеточный элемент связи представляет собой гофрированную структуру, нанесенную на поверхность или вытравленную непосредственно в материале. Вследствие своей периодичности решеточный элемент возбуждает на своей поверхности поверхностные волны, направленные вдоль оси периодичности.

## **Лекция 8. Примеры преобразования типов волн в практических приложениях**

*Согласование сред. Конструирование акустических линий задержки. Примеры использования изменения структуры поля вблизи границы раздела сред для электромагнитных волн. Примеры использования эффекта расщепления электромагнитных волн.*

### **1. Согласование сред**

Для улучшения передачи мощности волны через границу раздела среды должны быть согласованы, т.е. их волновые сопротивления должны быть одинаковыми. Однако на практике это условие выполняется крайне редко. Так, широко используемый в акустике твердый материал сапфир имеет акустическое сопротивление для продольных волн  $Z_a = 44.3 \cdot 10^6 \text{ кг}/(\text{м}^2\text{с})$ , а для воздуха  $Z_a = 4.27 \cdot 10^2 \text{ кг}/(\text{м}^2\text{с})$ . Следует отметить, что рассогласование сред для акустических волн получается во много раз большим, чем для электромагнитных волн.

Решить задачу согласования сред для акустических волн и минимизировать их отражение от границы раздела сред можно введением четвертьволнового трансформирующего слоя. Данный метод широко используется в оптике и технике СВЧ. Он основан на использовании модели эквивалентной линии передачи для анализа распространения акустических волн. Вторая среда при этом выполняет роль некоторого сопротивления нагрузки, под-

ключенного к линии передачи в сечении  $z=0$ . До этого сечения ( $z < 0$ ) эквивалентная линия моделирует распространение падающей и отраженной акустических волн в первой среде. Геометрия задачи показана на рисунке 1.

Рассчитаем входное сопротивление отрезка эквивалентной линии длиной  $\ell$ , соответствующей толщине выделенного слоя первой среды. При этом будем полагать, что сопротивление нагрузки эквивалентной линии равно акустическому сопротивлению второй среды  $Z_H = Z_2$ .

Для сечения  $z = -\ell$  можно записать:

$$p_a(-\ell) = p_{\text{пад}}(\exp(jk_1\ell) + R_p \exp(-jk_1\ell)),$$

$$v(-\ell) = \frac{p_{\text{пад}}}{Z_1}(\exp(jk_1\ell) - R_p \exp(-jk_1\ell)),.$$

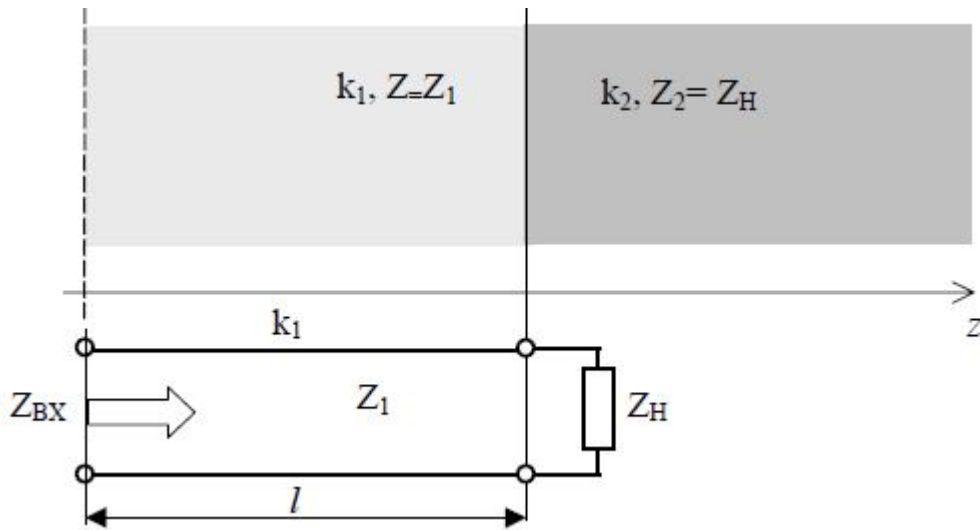


Рисунок 1 – Эквивалентная схема границы раздела сред

Входное сопротивление эквивалентной линии с постоянной распространения  $k_1$  на расстоянии  $\ell$  от границы по аналогии с теорией линий передачи может быть определено из формулы:

$$Z_{\text{вх}}(z = -\ell) = \frac{p_a(-\ell)}{v(-\ell)} = Z_1 \frac{\exp(jk_1\ell) + R_p \exp(-jk_1\ell)}{\exp(jk_1\ell) - R_p \exp(-jk_1\ell)}. \quad (2)$$

С учетом представления коэффициента отражения выражение (2) преобразуется к виду:

$$Z_{\text{вх}}(-\ell) = Z_1 \frac{Z_2 \cos(k_1 \ell) + jZ_1 \sin(k_1 \ell)}{Z_1 \cos(k_1 \ell) + jZ_2 \sin(k_1 \ell)}. \quad (3)$$

На расстоянии четверть длины волны  $\ell = \lambda / 4$   $k_1 \ell = \frac{2\pi}{\lambda} \lambda / 4 = \frac{\pi}{2}$  выражение (3) преобразуется к виду:

$$Z_{\text{вх}}\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{Z_1^2}{Z_2}. \quad (4)$$

Подбирая значение волнового сопротивления четвертьволнового слоя среды, можно решить задачу согласования двух сред. Между двумя средами необходимо расположить дополнительный четвертьволновый слой материала с таким акустическим сопротивлением, чтобы обеспечить равенство акустического сопротивления первой среды и входного сопротивления эквивалентной линии передачи. В этом случае отражение от обеих границ дополнительного согласующего слоя волны будут противофазны и равны по амплитуде, что приведет к их взаимной компенсации. Сдвиг фазы 180 градусов обеспечивается разностью хода волн между границами в полдлины волны, а равенство амплитуд – рациональным выбором акустического сопротивления трансформирующего слоя. Акустическое сопротивление согласующего (трансформирующего) четвертьволнового слоя  $Z_{\text{тр}}$  может быть получено из формулы (4):

$$Z_{\text{тр}} = \sqrt{Z_1 Z_2}. \quad (5)$$

Толщина согласующего слоя равна четверти длины волны в используемом материале. В связи с этим полоса частот низкого значения коэффициента отражения получается достаточно малой. Для расширения диапазона частот хорошего согласования применяется многослойная трансформирующая структура, состоящая из нескольких четвертьволновых слоев. В оптике аналогично выполняются «просветленные» стекла. Аналогично работают в антенной технике согласующие трансформаторы для электромагнитных волн, а также радиопоглощающие покрытия.

## 2. Конструирование акустических линий задержки

Для конструирования акустических линий задержки и фильтров чаще всего используются пьезоэлектрики (кварц, ниобат лития, титанат бария, танталат лития, пьезокерамика и др.), граничащие с воздухом. Поскольку акустическое сопротивление воздуха и твердых материалов отличаются на два порядка, то долю мощности, прошедшую из твердого материала в воздух, можно считать нулевой. Коэффициент отражения продольной волны от границы твердое тело – воздух для падающей продольной волны будет определяться соотношением:

$$R_{\ell\ell} = \frac{\sin(2\theta_{\ell\text{пад}})\sin(2\theta_{t\text{отр}}) - (V_{\ell\text{пад}} / V_{\ell\text{отр}})^2 \cos^2(2\theta_{t\text{отр}})}{\sin(2\theta_{\ell\text{пад}})\sin(2\theta_{t\text{отр}}) + (V_{\ell\text{пад}} / V_{\ell\text{отр}})^2 \cos^2(2\theta_{t\text{отр}})}. \quad (6)$$

Часть мощности падающей продольной волны преобразуется в мощность сдвиговой волны. Для отраженной сдвиговой волны при падении продольной волны коэффициент трансформации (коэффициент преломления) будет описываться выражением:

$$T_{t\ell} = \frac{2(V_{\ell\text{пад}} / V_{\ell\text{отр}})\sin(2\theta_{\ell\text{пад}})\cos(2\theta_{t\text{отр}})}{\sin(2\theta_{\ell\text{пад}})\sin(2\theta_{t\text{отр}}) + (V_{\ell\text{пад}} / V_{\ell\text{отр}})^2 \cos^2(2\theta_{t\text{отр}})}. \quad (7)$$

В случае падения сдвиговой волны вертикальной поляризации на границу воздух – твердое тело коэффициент отражения совпадает с коэффициентом отражения (6):

$$R_{tt} = R_{\ell\ell}, \quad (8)$$

а коэффициент преломления (трансформации) сдвиговой волны в продольную вычисляется по формуле:

$$T_{\ell t} = \frac{\sin(2\theta_{\ell\text{пад}})}{\sin(2\theta_{t\text{отр}})} T_{t\ell}. \quad (9)$$

Приравняв числитель выражения (6) нулю, можно определить угол падения, при котором коэффициент отражения продольной волны равен нулю, т.е. происходит преобразование одного типа волны в другой (падающая продольная акустическая волна переходит в отраженную сдвиговую). Данный

эффект важен для практического использования, поскольку в акустоэлектронике возбудить сдвиговую волну гораздо сложнее, чем продольную. На рисунке 2 показана конструкция преобразователя волн, работающая на описанном эффекте. В качестве среды использован плавленый кварц. Для него преобразование наблюдается при угле падения  $\theta_i = 42^\circ$ . Данный преобразователь является взаимный устройством. Это означает, что если сдвиговая волна падает на призму справа под углом  $\theta_i = 25^\circ$  к внутренней грани, то произойдет преобразование сдвиговой волны в продольную. Внешние грани перпендикулярны входящему и выходящему лучам.

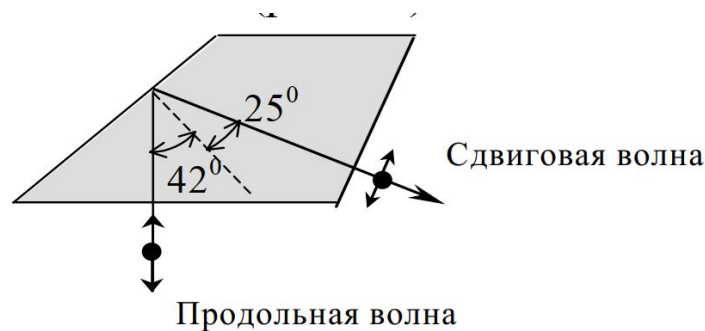


Рисунок 2 – Преобразование продольной акустической волны в поперечную при помощи призмы из плавленого кварца

Преобразование типов волн возможно и при использовании эффекта полного отражения от границы раздела сред. При угле падения, равном  $\theta_i = 45^\circ$ , коэффициент отражения как продольной, так и сдвиговой волны равен 1. Наблюдается полное отражение. Из анализа соотношений (6) и (8) следует, что существует такой угол падения, при котором значения  $R_{ii}$  и  $R_{\ell\ell}$  обращаются в нуль, т.е. соответствующей отраженной волны не будет.

Явление расщепления и явление полного отражения акустических волн широко используются в преобразователях типов волн радиоэлектронной аппаратуры, а также для создания акустических волноводов.

### 3. Примеры использования изменения структуры поля вблизи границы раздела сред для электромагнитных волн

Выполним анализ областей применения эффектов, возникающих при падении плоской электромагнитной волны на границу раздела двух сред.

Начнем с частного случая полного прохождения волны во вторую среду или полного преломления волны. В практических приложениях необходимость использования данного эффекта возникает для уменьшения в местах стыковки потерь на отражение при построении волноводов как диэлектрических, так и металлических.

Выбор формы места стыковки осуществляется на основе использования частного случая обращения в нуль коэффициента отражения. Угол падения, при котором возникает данное явление, называется *углом Брюстера*. Геометрия задачи показана на рисунке 3.

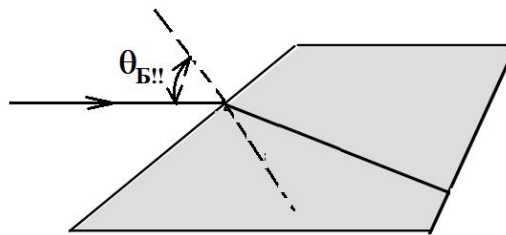


Рисунок 3 – Падение электромагнитной волны под углом Брюстера

Поскольку выражения, определяющие коэффициент отражения, зависят от поляризации падающей под произвольным углом электромагнитной волны, то соотношения, определяющие угол Брюстера, также будут отличаться для вертикальной и горизонтальной поляризаций:

- для волны вертикальной поляризации (направление вектора напряженности электрического поля лежит в плоскости падения волны):

$$\operatorname{tg}(\theta_{\text{Б}\parallel}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}, \quad (10a)$$

- для волны горизонтальной поляризации (направление вектора напряженности электрического поля перпендикулярно плоскости падения волны или параллельно границе раздела сред):

$$\operatorname{tg}(\theta_{\text{Б.}\perp}) = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}. \quad (106)$$

Следует отметить, что в естественных условиях сред, отличающихся диэлектрической проницаемостью на Земле, существенным образом больше, чем магнитных, то в практических приложениях эффект полного преломления используется чаще.

Негативным следствием распространения электромагнитных волн вертикальной поляризации под углом Брюстера к границе раздела сред является невозможность организации канала связи для антенн вертикальной поляризации, поскольку при отражении от границы раздела сред, например, земли, вся энергия уйдет в неё, а не отразится от поверхности. Данное следствие определяется выбором типа поляризации антенн, используемых для организации наземных каналов связи.

Еще одним практически важным частным случаем, имеющим место при падении электромагнитной волны линейной поляризации на границу раздела сред, является деполяризация отраженной волны или появление кроссполяризационной составляющей, отсутствующей в падающей волне. Данный эффект возникает вследствие различия коэффициентов отражения для волн вертикальной и горизонтальной поляризаций, на которые можно разложить две волны круговой поляризации с противоположным направлением вращения волну линейной поляризации. Явление деполяризации падающей волны наиболее часто используется в работе радиолокационных станций для обнаружения объектов, выполненных по технологии СТЕЛС. Как известно, радиопоглощающие покрытия обеспечивают существенное снижение уровня отраженного поля только на одной поляризации. Одновременное управление уровнями основной и кроссполяризационной составляющей от-

раженного поля с помощью известных радиопоглощающих материалов пока невозможно.

Явление полного отражения на границе раздела сред широко используется в оптике при создании призм, изменяющих направление лучей, а также при проектировании устройств СВЧ с использованием метаматериалов.

Описываемое явление наблюдается, когда первая среда является оптически более плотной ( $n_2 < n_1$  или  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ ) и угол падения электромагнитной волны, как показано на рисунке 4, больше критического угла или угла полного внутреннего отражения, т.е.:

$$\theta > \theta_{\text{кр}} = \arcsin(n_2 / n_1). \quad (11)$$

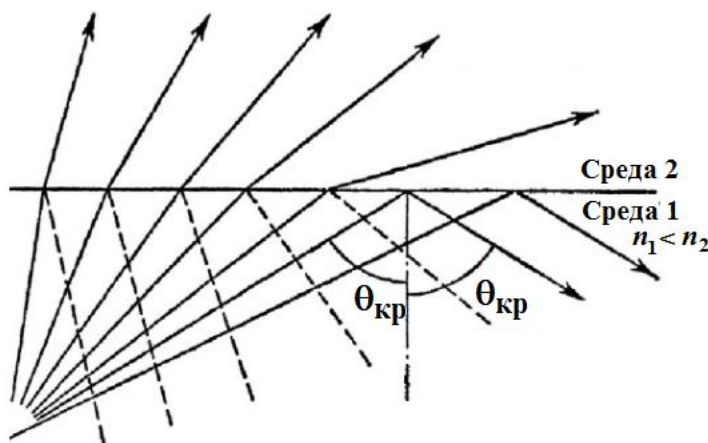


Рисунок 4 – Явление полного отражения на границе раздела сред

#### 4. Примеры использования эффекта расщепления электромагнитных волн

Ранее отмечалось, что эффект расщепления электромагнитных волн наблюдается в анизотропных средах при их подмагничивании. При этом напряженность поля подмагничивания определяет фазовые скорости распространяющихся в среде волн.

Рассмотрим примеры использования управления эффектом расщепления в продольно намагниченном феррите линейно поляризованной волны на две волны круговой поляризации с противоположным направлением враще-

ния. Устройство сверхвысоких частот (СВЧ), осуществляющее изменение поляризации электромагнитной волны называется поляризатором.

Данное устройство может осуществлять две функции:

- изменить угол наклона вектора  $\vec{H}$  относительно оси поляризационного эллипса электрического поля (использование эффекта Фарадея);
- изменить поляризацию распространяющейся волны с линейной на круговую (эффект вытеснения поля).

В первом случае в поляризаторе используется эффект Фарадея, заключающегося в повороте угла наклона вектора магнитной поля  $\vec{H}$  распространяющейся электромагнитной волны относительно направления распространения. В результате угол наклона вектора будет зависеть от пройденного волной в феррите расстояния  $z$ :

$$\theta = \theta' z = \frac{k_1 - k_2}{2} z, \quad (12)$$

где  $k_1, k_2$  - волновые числа соответственно круговой волны с левым и правым направлением вращения, зависящие от величины поля подмагничивания:

$$k_{1,2} = \omega \sqrt{\varepsilon(\mu_x \pm a)}. \quad (13)$$

Обозначения переменных, входящих в (13), были приведены в лекции 6.

Иллюстрация использования данного эффекта в поляризаторе приведена на рисунке 5.

Изменение поляризации распространяющейся электромагнитной волны осуществляется изменением поля подмагничивания, позволяющего управлять величиной магнитной проницаемости феррита. Зависимость свойств феррита для волн с левым и правым направлением вращения показана на рисунке 6.

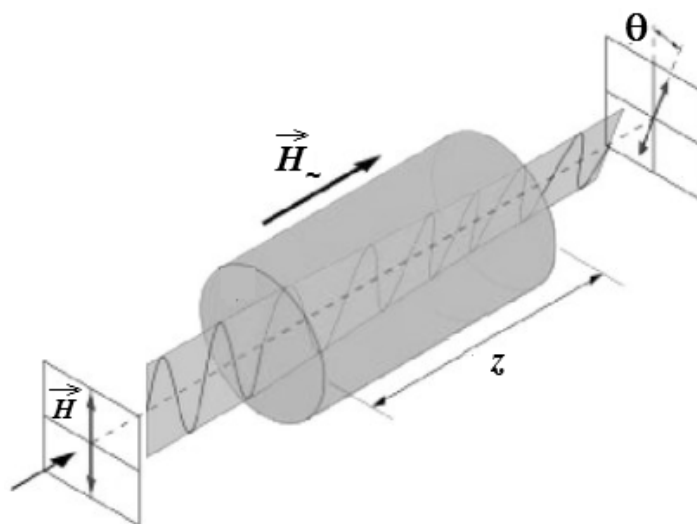


Рисунок 5 – Иллюстрация эффекта Фарадея после прохождения высокочастотной волны через продольно намагниченный феррит

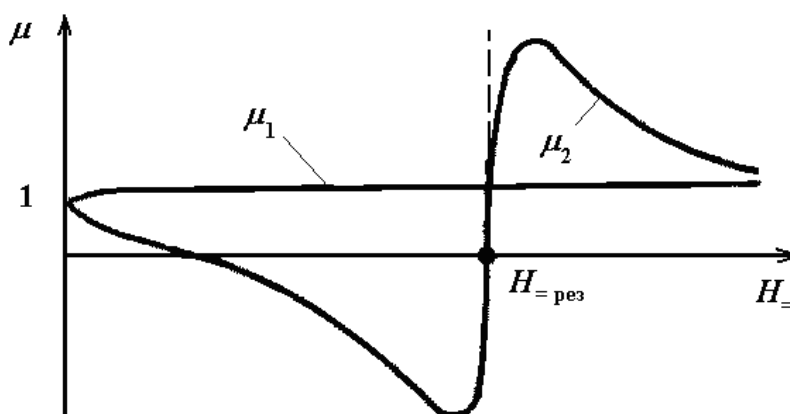


Рисунок 6 – Зависимость свойств феррита для волн с левым ( $\mu_1$ ) и правым ( $\mu_2$ ) направлением вращения

Анализ данного рисунка показывает, что при определенных значениях величины напряженности поля подмагничивания для волны с правым направлением вращения величина магнитной проницаемости стремится к бесконечности, следовательно, величина фазовой скорости данной волны стремится к нулю. В результате на выходе волна будет иметь круговую поляризацию с левым направлением вращения.

Следует отметить, что изменение поляризации распространяющейся в гиротропной среде электромагнитной волны будет наблюдаться и для поперечно подмагниченного феррита. Однако в приборах данный вариант не используется в силу громоздкости установки. В то же время для сред с диэлек-

трической анизотропией данный эффект наблюдается при организации каналов ионосферной и космической связи, когда электромагнитная волна определенной частоты проходит через поперечно намагниченную плазму (ионосферу). В этом случае сдвиг фаз между обыкновенной и необыкновенной волнами будет определяться соотношением:

$$\psi = (k_{\text{необ}} - k_{\text{об}})x. \quad (14)$$

Анализ данного соотношения показывает, что поляризация суммарной волны электрического поля будет либо линейной, если фазовый сдвиг равен целому числу  $\pi$ , т.е.  $\psi = n\pi$ , либо эллиптической (во всех остальных случаях). Частный случай эллиптической поляризации – круговая поляризация – возможен при равенстве амплитуд  $E_{0z} = E_{0y}$  (когда в точке  $x = 0$  вектор напряженности электрического поля исходной волны направлен под углом  $45^\circ$  по отношению к оси  $Oy$ ) в точках, где  $\psi = (2n + 1)\pi / 2$ . Данный эффект получил название *эффекта Коттона-Муттона*. Для сред с диэлектрической анизотропией (ионосферы) указанное явление получило название *эффекта Фоххта*.

Наличие данного эффекта определяет требования к антеннам каналов космической связи.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### АКУСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ СРЕД

Таблица А1 - Твердые вещества

Вещество	Плотность $\rho_0$ , кг/м <sup>3</sup>	Модуль упру- го- сти (Юнга), $E \cdot 10^{-10}$ Н/м <sup>2</sup>	Модуль сдвига, $\mu \cdot 10^{-10}$ Н/м <sup>2</sup>	Коэффициент Пуассона $\sigma$
Алюминий	2710	7,1	2,6	0,33
Медь	8900	12,3	4,55	0,35
Свинец	11340	1,6	0,57	0,44
Сталь	7700	20,6	8,0	0,29
Бериллий	1850	30,0	14,5	0,03
Лед	900	10,1	4,0	-
Плавленный кварц	2200	7,2	3,1	0,17
Полиэтилен	920	0,020	-	-
Фторопласт	2200	0,045	-	-
Пенопласт	100	0,005	-	-

Таблица А2 - Жидкие вещества

Вещество	Удельная плотность $\rho_0$ , кг/м <sup>3</sup>	Коэффициент сжи- маемости $\chi$ , 1/ГПа	Коэффициент сдви- говой вязкости $\eta$ , мПа С (при 20°C)
Вода	1000	0,47	1,002
Ацетон	800	1,27	0,322
Глицерин	1260	0,22	1480
Ртуть	13500	0,038	1,554

Таблица А3 - Газообразные вещества

Вещество	Плотность ( 0°C, 101,3 кПа) $\rho_0$ , кг/м <sup>3</sup>	Газовая посто- янная $R$ , кДж/(кг К)	Показатель адиабаты $\gamma$	Коэффициент сдвиговой вязкости $\eta$ , мПа С (при 20°C, 101,3 кПа)
Воздух	1290	287	1,40	0,0182
Азот	1250	297	1,40	0,0175
Водород	90	4125	1,41	0,0088
Гелий	180	2078	1,66	0,0196